Musterlösung zur Musterprüfung 1 in Mathematik

Diese Musterlösung enthält ausführliche Lösungen zu allen Aufgaben der Musterprüfung 1 in Mathematik sowie Hinweise zum Selbstlernen.

Literaturhinweise

1) Bosch: Brückenkurs Mathematik, Oldenbourg Verlag, München

Dieses Buch beinhaltet fast alle Themengebiete der Mathematikprüfung. Es enthält viele Beispiele und Übungsaufgaben mit Lösungen.

2) Kusch: Mathematik (Band 1 – 4), Cornelsen Verlag, Berlin

Der 1.Band enthält alles Wissenswerte zur Arithmetik und Algebra. Seitenweise werden sehr übersichtlich Beispiele vorgerechnet und ausführlich kommentiert. Das Buch enthält Hunderte von Übungsaufgaben, deren Lösungen in einem extra Lösungsbuch zu finden sind.

Der 2.Band behandelt die Geometrie.

Der 3. und 4.Band haben die Differential- und Integralrechnung zum Thema. Auch hier werden seitenweise Beispiele vorgerechnet und ausführlich kommentiert. Die Bücher enthalten ebenfalls Hunderte von Übungsaufgaben, deren Lösungen in extra Lösungsbüchern zu finden sind.

Diese Bücher sind nicht nur für die Vorbereitung auf die Mathematikprüfung geeignet, sie können auch im Studium sehr hilfreich sein.

Die genannten Bücher gehören zu den Standardwerken der Mathematik und können in vielen Hochschulbibliotheken ausgeliehen werden.

Themenbereich I

Algebraische Umformungen

In diesem Themenbereich geht es um einfache algebraische Umformungen wie z.B.

$\rightarrow$ Termumformungen

Beispiel: $3x+4y-2x+5-y+3=x+3y+8$

$\rightarrow$ Berücksichtigung von Minuszeichen vor Klammern

Beispiel: $-(2x+y-5)=-2x-y+5$

$\rightarrow$ Ausmultiplizieren von Klammern

Beispiele: $-3\cdot(5x-2)=-15x+6$

$$(3+4x)\cdot(2-4y)=6-12y+8x-16xy$$

$\rightarrow$ Faktorisieren von Termen / Ausklammern

Beispiel: $5x+3xy-2xz=x\cdot(5+3y-2z)$

Aufgabe 84

Wenn man zwei Klammern ausmultiplizieren will, dann multipliziert man jeden Term der ersten Klammer mit jedem Term der zweiten Klammer.

$(7x-m)\cdot(8x+n)$ / Jeder Term der ersten Klammer wird mit jedem Term der zweiten Klammer multipliziert.

$=7x\cdot 8x+7x\cdot n-m\cdot 8x-m\cdot n$ / zusammenfassen, es gilt „Punkt- vor Strichrechnung“

$=56x^2+7nx-8mx-mn$ / Malpunkte zwischen Variablen (Buchstaben) dürfen weggelassen werden. Variablen werden üblicherweise alphabetisch sortiert, also n vor x. Diese Sortierung ist aber nicht zwingend notwendig. D.h. wenn Sie 7xn anstatt 7nx schreiben, ist das kein Fehler.

Ausmultiplizieren zweier Klammern

$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Aufgabe 85

Bei komplizierteren Termen mit mehreren Klammern geht man häufig so vor, dass zuerst der innere Term vereinfacht wird.

$$-2[(k+3)\cdot(k-2)]-3(k-3)$$ / Zuerst werden die beiden inneren Klammern ausmultipliziert.

$$=-2[k\cdot k+k\cdot(-2)+3\cdot k+3\cdot(-2)]-3(k-3)$$ / zusammenfassen

$$=-2[k^2-2k+3k-6]-3(k-3)$$ / zusammenfassen

$$=-2[k^2+k-6]-3(k-3)$$ / Nun können die Zahlen vor den Klammern mit jedem Term in der Klammer multipliziert werden.

$$=-2\cdot k^2-2\cdot k-2\cdot(-6)-3\cdot k-3\cdot(-3)$$ / zusammenfassen

$$=-2k^2-2k+12-3k+9$$ / zusammenfassen

$$=-2k^2-5k+21$$

Anmerkung: Wenn zwei Rechenzeichen direkt hintereinander stehen, dann wird um das zweite Rechenzeichen und der zugehörigen Zahl / dem zugehörigen Term eine Klammer gesetzt.

Beispiele: $k\cdot(-2)=-2k$ oder $-2\cdot(-6)=12$

Themenbereich II

Bruchrechnen

In diesem Themenbereich geht es um die Grundlagen der Bruchrechnung. Es werden Kenntnisse über das Erweitern und Kürzen von Brüchen, die Addition und Subtraktion sowie über die Multiplikation und Division geprüft.

Bei der Addition und Subtraktion ist darauf zu achten, dass die zu verrechnenden Brüche einen gemeinsamen Nenner besitzen. Sollte dies nicht der Fall sein, so müssen die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner, den sog. Hauptnenner, gebracht werden.

Beispiel: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

Die Multiplikation von Brüchen ist demgegenüber wieder leichter, denn hier gilt „Zähler mal Zähler" und „Nenner mal Nenner". Eine Erweiterung auf einen Hauptnenner ist nicht erforderlich.

Beispiel: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Durch einen Bruch wird dividiert, indem mit dem Kehrwert multipliziert wird.

Beispiel: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

Aufgabe 86

In dieser Aufgabe sollen gemischte Zahlen addiert und subtrahiert werden. Eine gemischte Zahl besteht aus der Summe einer ganzen Zahl und einem echten Bruch (echter Bruch: Zähler < Nenner), wobei das „+“-Zeichen weggelassen wird. Zur besseren Verrechnung gemischter Zahlen werden diese in unechte Brüche (unechter Bruch: Zähler > Nenner) umgewandelt.

Beispiele:

$$3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

$$6\frac{1}{4}=6+\frac{1}{4}=\frac{24}{4}+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$$

$$5\frac{9}{10}=5+\frac{9}{10}=\frac{50}{10}+\frac{9}{10}=\frac{59}{10}$$

$$3\frac{1}{2}+6\frac{1}{4}-5\frac{9}{10}$$

/ umwandeln der gemischten Zahlen in unechte Brüche

$$=\frac{7}{2}+\frac{25}{4}-\frac{59}{10}$$

/ Brüche werden addiert oder subtrahiert, in dem die Brüche auf den Hauptnenner gebracht werden. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 2; 4 und 10 ist 20.

$$=\frac{7\cdot 10}{2\cdot 10}+\frac{25\cdot 5}{4\cdot 5}-\frac{59\cdot 2}{10\cdot 2}$$

$$=\frac{70}{20}+\frac{125}{20}-\frac{118}{20}$$

/ Die Zähler werden nun addiert oder subtrahiert, der Nenner bleibt erhalten.

$$=\frac{70+125-118}{20}$$

/ ausrechnen

$$=\frac{77}{22}$$

/ Das Ergebnis ist ein unechter Bruch und kann deshalb wieder in eine gemischte Zahl umgewandelt werden.

$$=\frac{60}{20}+\frac{17}{20}=3+\frac{17}{20}=3\frac{17}{20}$$

Aufgabe 87

Zwei Brüche werden dividiert, in dem der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert wird.

$$\frac{2a}{3} : \frac{8}{12a}$$ / mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multiplizieren

$$= \frac{2a}{3} \cdot \frac{12a}{8}$$ / Brüche werden multipliziert, in dem Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner gerechnet wird.

$$= \frac{2a \cdot 12a}{3 \cdot 8}$$ / zusammenfassen

$$= \frac{24a^2}{24}$$ / kürzen

Brüche werden gekürzt, in dem der Zähler und der Nenner durch die gleiche Zahl (oder Variable) dividiert werden.

$$= \frac{24a^2 : 24}{24 : 24}$$ / vereinfachen

$$= \frac{1a^2}{1} = a^2$$

Themenbereich III

Einfache Berechnungen

In diesem Themenbereich geht es um das Kopfrechnen. Einfache Aufgaben, bei denen auf Regeln wie Punkt- vor Strichrechnung geachtet werden muss, sollen gelöst werden. Ebenso können Klammern, einfache Wurzeln oder Potenzen enthalten sein.

Beispiele:

$$2+3\cdot 5=2+15=17$$

$$3\cdot(2+4\cdot 3)=3\cdot(2+12)=3\cdot 14=42$$

$$2-4\cdot\sqrt{25}=2-4\cdot 5=2-20=-18$$

$$2^3-3\cdot 6=8-18=-10$$

Aufgabe 88

Für diese Aufgabe ist die Kenntnis der gängigsten Quadratwurzeln wichtig.

So gilt z.B.: $\sqrt{0} = 0$, denn $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$

$\sqrt{1} = 1$, denn $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$

$\sqrt{4} = 2$, denn $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

$\sqrt{121} = 11$, denn $11 \cdot 11 = 121$

Des Weiteren muss bei dieser Aufgabe auf die wichtige Regel „Punkt- vor Strichrechnung" geachtet werden.

$\sqrt{121} - \sqrt{81} \cdot (-2)$ / ausrechnen der Wurzeln

$= 11 - 9 \cdot (-2)$ / Punkt- vor Strichrechnung

$= 11 + 18$ / ausrechnen

$= 29$

Vorzeichenregeln:

$+x+(+y)=x+y$	$+x\cdot(+y)=xy$
$+x+(-y)=x-y$	$+x\cdot(-y)=-xy$
$+x-(+y)=x-y$	$-x\cdot(+y)=-xy$
$+x-(-y)=x+y$	$-x\cdot(-y)=xy$
$-x+(+y)=-x+y$	$+x:(+y)=x:y$
$-x+(-y)=-x-y$	$+x:(-y)=-x:y$
$-x-(+y)=-x-y$	$-x:(+y)=-x:y$
$-x-(-y)=-x+y$	$-x:(-y)=x:y$

Aufgabe 89

Bei dieser Aufgabe ist die wichtige Regel „Punkt- vor Strichrechnung“ zu beachten.

$$56:4+3\cdot 7-5\cdot 14:2$$ / Punkt- vor Strichrechnung

$$=14+21-35$$ / ausrechnen

$$=0$$

Anmerkungen

Bei reiner Punktrechnung wird üblicherweise von links nach rechts gerechnet.

Beispiel: $5\cdot 14:2=(5\cdot 14):2=70:2=35$

Es dürfen aber auch Rechenvorteile genutzt werden, damit die Zwischenergebnisse möglichst aus niedrigen und daher besser im Kopf zu rechnenden Zahlen bestehen.

Beispiel: $5\cdot 14:2=5\cdot(14:2)=5\cdot 7=35$

Themenbereich IV

Geometrie

In diesem Themenbereich geht es um grundlegende Berechnungen zu geometrischen Figuren wie z.B. Quadrat, Rechteck, Dreieck, Kreis und gerade Prismen (z.B. Quader). Dazu ist die Kenntnis der folgenden Formeln erforderlich:

Quadrat mit der Seitenlänge a

Flächeninhalt: $A_Q = a \cdot a = a^2$ Umfang: $U_Q = 4a$

Rechteck mit den Seitenlängen a und b

Flächeninhalt: $A_R = a \cdot b$ Umfang: $U_R = 2a + 2b$

Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c

Flächeninhalt: $A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ Umfang: $U_D = a + b + c$

Wobei g eine der drei Seiten ist und h die zugehörige Höhe.

Kreis mit dem Radius r

Flächeninhalt: $A_K = \pi \cdot r^2$ Umfang: $U_K = 2 \cdot \pi \cdot r$

Wobei $\pi \approx 3$ gelten soll.

Prismen mit der Grundfläche G und der Höhe h

Volumen: $V_P = G \cdot h$ Oberfläche: $O_P = 2 \cdot G + M$

Wobei M die Mantelfläche ist.

Quader mit den Kantenlängen a, b und c

Volumen: $V_Q = a \cdot b \cdot c$ Oberfläche: $O_Q = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

Außerdem können in diesem Themenbereich Aufgaben zur Anwendung des Satzes von Pythagoras gestellt werden. Dazu findet sich eine ausführliche Erklärung in den folgenden Musterlösungen.

Aufgabe 90

Für die Lösung dieser Aufgabe werden die folgenden Formeln benötigt:

Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge a : $A_Q = a \cdot a = a^2$

Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r : $A_K = \pi \cdot r^2$

π ist die sogenannte Kreiszahl und irrational, d.h. es handelt sich um eine Dezimalzahl (Kommazahl), die nach dem Komma nicht endet und auch nicht periodisch ist. Die ersten Stellen von π lauten:

$\pi = 3{,}141592653\ldots$. Da für die Berechnung der Prüfungsaufgaben kein Taschenrechner zugelassen ist, wird mit einem gerundeten Wert gerechnet: $\pi \approx 3$.

Die Seitenlänge des Quadrates ist: $a = 10cm$. Daraus folgt für den Radius des Kreises: $r = 5cm$.

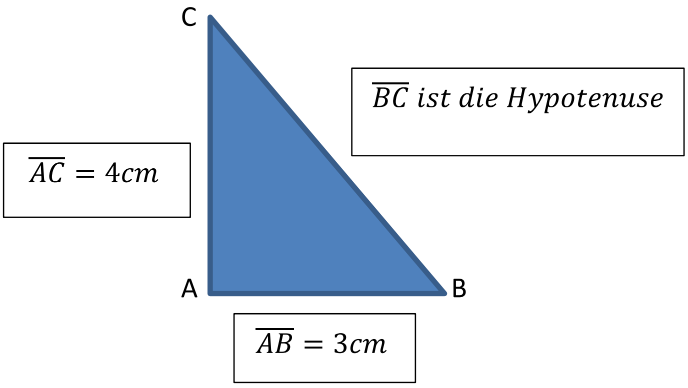
Somit ergibt sich für den Flächeninhalt des Quadrates: $A_Q = (10cm)^2 = 100cm^2$.

Für den Flächeninhalt des Kreises ergibt sich: $A_k = 3 \cdot (5cm)^2 = 75cm^2$.

Der Abfall beträgt damit: $A_Q - A_K = 25cm^2$.

Aufgabe 91

Bei der Lösung dieser Aufgabe hilft zunächst einmal eine kleine Skizze:



Auf rechtwinklige Dreiecke lässt sich der **Satz des Pythagoras** anwenden:

Die Summe der Quadrate über den Katheten ist gleich dem Quadrat über der Hypotenuse. Wobei die Katheten die Seiten sind, die an dem rechten Winkel anliegen. Die Hypotenuse ist die Seite, die gegenüber vom rechten Winkel liegt.

In dieser Aufgabe sind also $\overline{AB} = 3cm$ und $\overline{AC} = 4cm$ die Katheten und $\overline{BC}$ ist die Hypotenuse.

Somit lautet der Satz des Pythagoras für dieses Dreieck:

$$
\begin{aligned}
& (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = (\overline{BC})^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (3cm)^2 + (4cm)^2 = (\overline{BC})^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 9cm^2 + 16cm^2 = (\overline{BC})^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 25cm^2 = (\overline{BC})^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 5cm = \overline{BC}
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Der Satz des Pythagoras besteht aus einer Gleichung, die umgeformt werden kann und in die Zahlen eingesetzt werden können. Zwischen diese Gleichungen werden Äquivalenzpfeile $\Leftrightarrow$ gesetzt, die angeben, dass die Umformungen/Berechnungen von Zeile zu Zeile äquivalent (gleichwertig) zueinander sind.

Themenbereich V

Lineare Gleichungen und Gleichungen, die sich auf lineare Gleichungen zurückführen lassen

In diesem Themenbereich wird das Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die sich auf lineare Gleichungen zurückführen lassen, überprüft. Hierbei können zum einen Gleichungen vorgegeben sein, die zu lösen sind. Zum anderen können aber auch Textaufgaben gestellt werden, zu denen dann eine passende Gleichung aufgestellt und eventuell auch gelöst werden soll. Bei Textaufgaben empfiehlt sich eine Aufteilung des Textes in einzelne Abschnitte. Ein ausführliches Beispiel dazu findet sich in der folgenden Musterlösung.

Aufgabe 92

Um diese Aufgabe zu lösen, ist es zweckmäßig, den Text in seine Bestandteile zu zerlegen.

„Dividiert man den sechsten Teil einer Zahl durch 5 und subtrahiert vom Ergebnis 2, so erhält man das Dreifache der Zahl vermehrt um 10."

$\longrightarrow$ Der sechste Teil einer Zahl ist $\frac{x}{6}$.

„Dividiert man den sechsten Teil einer Zahl durch 5 und subtrahiert vom Ergebnis 2, so erhält man das Dreifache der Zahl vermehrt um 10."

$\longrightarrow$ Division durch 5 bedeutet $\frac{x}{6} : 5 = \frac{x}{6 \cdot 5}$.

„Dividiert man den sechsten Teil einer Zahl durch 5 und subtrahiert vom Ergebnis 2, so erhält man das Dreifache der Zahl vermehrt um 10."

$\longrightarrow$ Subtraktion von 2 ergibt $\frac{x}{6 \cdot 5} - 2$.

„Dividiert man den sechsten Teil einer Zahl durch 5 und subtrahiert vom Ergebnis 2, so erhält man das Dreifache der Zahl vermehrt um 10."

$\longrightarrow$ Das Komma und die Formulierung „so erhält man" symbolisiert das Gleichzeichen $\frac{x}{6 \cdot 5} - 2 =$.

„Dividiert man den sechsten Teil einer Zahl durch 5 und subtrahiert vom Ergebnis 2, so erhält man das Dreifache der Zahl vermehrt um 10."

$\longrightarrow$ Das Dreifache der Zahl ergänzt die Gleichung zu $\frac{x}{6 \cdot 5} - 2 = 3x$.

„Dividiert man den sechsten Teil einer Zahl durch 5 und subtrahiert vom Ergebnis 2, so erhält man das Dreifache der Zahl vermehrt um 10."

$\longrightarrow$ Vermehrt um 10 vervollständigt die gesuchte Gleichung $\frac{x}{6 \cdot 5} - 2 = 3x + 10$.

Aufgabe 93

Diese Gleichung kann zunächst auf der linken Seite vereinfacht werden.

$$5x + 20 - 2(x + 12) = 8 \qquad \text{/ ausmultiplizieren der Klammer}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x + 20 - 2 \cdot x - 2 \cdot 12 = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x + 20 - 2x - 24 = 8 \qquad \text{/ zusammenfassen}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x - 4 = 8 \qquad / +4$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x - 4 + 4 = 8 + 4$$

/ Wichtig ist, dass die 4 auf beiden Seiten der Gleichung addiert wird.

$$\Leftrightarrow \quad 3x = 12 \qquad / :3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x :3 = 12 :3$$

/ Auch hier muss auf beiden Seiten durch 3 geteilt werden.

$$\Leftrightarrow \quad x = 4$$

Themenbereich VI

Lineare Gleichungssysteme

In diesem Themenbereich geht es um lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten. Auch hier kann sowohl ein lineares Gleichungssystem vorgegeben sein, als auch eine Textaufgabe gestellt werden, aus der ein passendes lineares Gleichungssystem aufgestellt werden soll.

Für das Lösen linearer Gleichungssysteme stehen verschiedene Lösungsverfahren zur Verfügung. Diese Verfahren werden in der folgenden Musterlösung dargestellt.

Textaufgaben können in einzelne Bestandteile zerlegt werden, um so die verschiedenen Gleichungen aufstellen zu können. Auch hierzu findet sich im Folgenden ein ausführliches Beispiel.

Aufgabe 94

Lineare Gleichungssysteme lassen sich mit Hilfe verschiedener Verfahren lösen. Dazu gehören z.B. das Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additionsverfahren. Je nachdem, wie das Gleichungssystem aufgebaut ist, ist das eine oder andere Verfahren für die Lösung des Systems günstiger.

Nach dem Einsetzungsverfahren ergibt sich der folgende Lösungsweg:

$$3x-4y=18 \quad \wedge \quad 6x=8y+38 \qquad /:2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x-4y=18 \quad \wedge \quad 3x=\boxed{4y+19}$$

/ Die $4y+19$ der rechten Gleichung können nun für die $3x$ der linken Gleichung eingesetzt werden.

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{4y+19}-4y=18 \quad \wedge \quad 3x=4y+19$$

/ zusammenfassen der linken Gleichung

$$\Leftrightarrow \quad 19=18 \quad \wedge \quad 3x=4y+19$$

Die linke Gleichung besteht aus der falschen Aussage $19=18$ und dieses bedeutet, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Das heißt, es existieren keine Zahlen die gleichzeitig beide Gleichungen des Systems erfüllen.

Nach dem Gleichsetzungsverfahren ergibt sich der folgende Lösungsweg:

$$3x-4y=18 \quad /+4y \quad \wedge \quad 6x=8y+38 \qquad /:2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x=\boxed{18+4y} \quad \wedge \quad 3x=\boxed{4y+19}$$

/ Die jeweils rechten Seiten der Gleichungen können nun gleichgesetzt werden.

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{18+4y=4y+19} \quad /-4y \quad \wedge \quad 3x=4y+19$$

$$\Leftrightarrow \quad 18=19 \quad \wedge \quad 3x=4y+19$$

Die linke Gleichung besteht aus der falschen Aussage $18=19$ und damit besitzt das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Aufgabe 95

Zu dieser Textaufgabe lassen sich zwei lineare Gleichungen aufstellen. Eine Gleichung heißt linear, wenn die Variablen höchstens ersten Grades sind.

Die erste Gleichung ergibt sich aus der Anzahl der Köpfe. Sowohl ein Huhn als auch ein Hase haben jeweils einen Kopf. Wenn x Hühner und y Hasen zusammen 28 Köpfe haben, lautet die Gleichung:

$$x + y = 28$$

Die zweite Gleichung ergibt sich aus der Anzahl der Füße. Normalerweise hat ein Huhn zwei Füße und ein Hase vier Füße. Wenn x Hühner und y Hasen zusammen 88 Füße haben, lautet die Gleichung:

$$2x + 4y = 88$$

Beide Gleichungen zusammen bilden ein lineares Gleichungssystem, dass z.B. mit dem Additionsverfahren gelöst werden kann.

$$\begin{array}{lrl} & x + y = 28 & / \cdot (-2) \\ \wedge & 2x + 4y = 88 & \\ \hline \Leftrightarrow & -2x - 2y = -56 & \\ \wedge & 2x + 4y = 88 & \\ \hline \Leftrightarrow & 2y = 32 & / : 2 \\ \wedge & 2x + 4y = 88 & \\ \hline \Leftrightarrow & y = 16 & / \text{ einsetzen in die zweite Gleichung} \\ \wedge & 2x + 4 \cdot 16 = 88 & / \text{ nach x auflösen} \\ \hline \Leftrightarrow & y = 16 & \\ \wedge & x = 12 & \end{array}$$

Addition der beiden Gleichungen

Der Fuchs hat also 12 Hühner und 16 Hasen gestohlen.

Anmerkung: Das $\wedge$ ist das logische und. Es gibt an, dass die beiden Gleichungen zusammengehören und ein System bilden.

Themenbereich VII

Lösen von quadratischen Gleichungen

In diesem Themenbereich geht es um das Lösen quadratischer Gleichungen. Hierfür stehen verschiedene Lösungsverfahren zur Verfügung, von denen einige in den Musterlösungen dargestellt werden. Auch hier könnte es sein, dass leichte Textaufgaben, die das Aufstellen und Lösen einer quadratischen Gleichung erfordern, gestellt werden.

Aufgabe 96

Für das Lösen quadratischer Gleichungen stehen verschiedene Lösungsverfahren zur Verfügung. Dazu gehören z.B. die quadratische Ergänzung und die pq-Formel, die eine Zusammenfassung der quadratischen Ergänzung darstellt. Je nachdem, wie die quadratische Gleichung aufgebaut ist, kann auch der Satz von Vieta oder eine binomische Formel zur Lösung der Gleichung benutzt werden.

Um entscheiden zu können, welche Lösungsmethode am schnellsten zum Ziel führt, werden zunächst alle Ausdrücke auf eine Seite der Gleichung gebracht. Im Anschluss daran ist es sinnvoll, dass vor dem x^2 nichts mehr steht, also weder ein Minuszeichen noch eine Zahl. Damit erhält man die sogenannte Normalform einer quadratischen Gleichung: $x^2 + px + q = 0$.

Tipp, falls Unsicherheit dahingehend besteht, welche Lösungsmethode am schnellsten zum Ziel führt: Mit Hilfe der pq-Formel lässt sich eine quadratische Gleichung immer lösen!

1. Lösung mit Hilfe einer binomischen Formel

$$2x^2 + 4x = -2 \qquad / +2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 4x + 2 = 0 \qquad / :2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$ / Hierbei handelt es sich um die 1.Binomische Formel.

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 0 \qquad / \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \qquad / -1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-1\}$$

2.Lösung mit Hilfe der pq-Formel

$$2x^2 + 4x = -2 \qquad / +2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 4x + 2 = 0 \qquad / :2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

/ Hierbei handelt es sich um die Normalform einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p = +2$ und $q = +1$.

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{+2}{2}\right)^2 - (+1)}$$

/ pq-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-1\}$$

Aufgabe 97

Diese quadratische Gleichung kann direkt nach x aufgelöst werden. Es ist kein besonderes Lösungsverfahren erforderlich.

$$
\begin{array}{llcll}
 & (x-7)^2+1=10 & & & /-1 \\
\Leftrightarrow & (x-7)^2=9 & & & /\sqrt{} \\
\Leftrightarrow & x-7=+3 & \vee & x-7=-3 & /+7 \\
\Leftrightarrow & x=10 & \vee & x=4 & \\
\Rightarrow & \mathbb{L}=\{4;10\} & & &
\end{array}
$$

Anmerkung: Das $\vee$ ist das mathematische oder. Es wird verwendet, wenn entweder die eine oder die andere Aussage gelten soll. Da $x-7$ in der obigen Gleichung nicht gleichzeitig gleich $+3$ und gleich -3 sein kann, wird es zwischen die beiden Aussagen geschrieben. Dadurch wird auch verdeutlicht, dass es zwei Lösungen gibt.

Themenbereich VIII

Lösen von Ungleichungen

In diesem Themenbereich wird das Lösen von Ungleichungen überprüft. Grundsätzlich können Ungleichungen wie Gleichungen gelöst werden. Es sind jedoch zwei Besonderheiten bei der Lösung von Ungleichungen zu beachten:

1) Bei der Multiplikation oder Division einer Ungleichung mit einer negativen Zahl ändert sich die Relation.

Beispiel: $-2 \leq 3 \qquad / \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow \quad 2 \geq -3$

2) Wenn der Kehrwert einer Ungleichung gebildet wird, ändert sich die Relation.

Beispiel: $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ / Kehrwert der Ungleichung

$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{1} \geq \frac{2}{1} \qquad / \ \frac{4}{1} = 4, \frac{2}{1} = 2$

$\Leftrightarrow \quad 4 \geq 2$

Aufgabe 98

	$4x \cdot 2x > 32$	/ zusammenfassen
$\Leftrightarrow$	$8x^2 > 32$	$/ :8$
$\Leftrightarrow$	$x^2 > 4$	$/ \sqrt{\ }$
$\Leftrightarrow$	$x > 2 \quad \vee \quad x < -2$	
$\Rightarrow$	$\mathbb{L} = \{x \mid x < -2 \vee x > 2\}$	

Aufgabe 99

Die senkrechten Striche um den Term $x+8$ werden als Betragsstriche bezeichnet. Der Term $|x+8|$ heißt der Betrag von $x+8$ und bedeutet, dass das Ergebnis von diesem Ausdruck – unabhängig davon, welche Zahl für x eingesetzt wird - immer positiv ist.

Beispiele: Für $x=5$ gilt: $|5+8|=|13|=13$.

Für $x=0$ gilt: $|0+8|=|8|=8$.

Für $x=-3$ gilt: $|-3+8|=|5|=5$.

Für $x=-10$ gilt: $|-10+8|=|-2|=2$.

Für $x=-21$ gilt: $|-21+8|=|-13|=13$.

Da also immer $|x+8| > 0$ gilt, ist die Ungleichung $|x+8| < -8$ nicht lösbar. Es gibt keine Zahlen, die für x eingesetzt werden können, so dass das Ergebnis des Betrages kleiner als -8 wird.

$\Rightarrow \quad \mathbb{L}=\{\}$

Themenbereich IX

Potenzen und Wurzeln

Für diesen Themenbereich ist die Kenntnis der Potenzgesetze von Bedeutung:

$\rightarrow \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\rightarrow \quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\rightarrow \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

$\rightarrow \quad \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

$\rightarrow \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Außerdem können die folgenden Umschreibregeln hilfreich sein:

$\rightarrow \quad \dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

$\rightarrow \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Aufgabe 100

$$x^3 - \sqrt[3]{x^6} + 5x^2 \qquad / \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$= x^3 - x^{\frac{6}{3}} + 5x^2 \qquad \text{/ kürzen des Exponenten}$$

$$= x^3 - x^2 + 5x^2 \qquad \text{/ zusammenfassen}$$

$$= x^3 + 4x^2$$

Weiter kann hier nicht zusammengefasst werden, da die Potenzgesetze nur für Punktrechnung aber nicht für Strichrechnung gelten.

Aufgabe 101

Für diese Aufgabe wird die Kenntnis der Kubikwurzeln benötigt.

So ist z.B. $\sqrt[3]{1}=1$, denn $1^3=1$

$\sqrt[3]{8}=2$, denn $2^3=8$

$\sqrt[3]{125}=5$, denn $5^3=125$

$$\frac{\sqrt[3]{125}\cdot 5^9}{5^4\cdot 5^6}$$ / berechnen der Kubikwurzel

$$=\frac{5\cdot 5^9}{5^4\cdot 5^6}$$ / Potenzgesetz: $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$$=\frac{5^{1+9}}{5^{4+6}}$$ / zusammenfassen

$$=\frac{5^{10}}{5^{10}}$$ / kürzen

$$=1$$

Themenbereich X

Einfache Zins- und Zinseszinsrechnung

Aufgaben zur Zins- und Zinseszinsrechnung lassen sich entweder mit Hilfe von Formeln oder über einen Dreisatz lösen.

Um Zinseszinsrechnung handelt es sich, wenn Zinsen, die am Ende eines Jahres gut geschrieben werden, auf dem Konto verbleiben. Die Zinsen erhöhen damit das Anfangskapital für das darauf folgende Jahr. Die Formel lautet:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

K_n gibt das Gesamtkapital nach n Jahren an.

K_0 ist das Anfangskapital.

$q = 1 + \frac{p}{100}$ ist der Aufzinsungsfaktor.

p ist der Zinssatz in Prozent.

n ist die Laufzeit in Jahren.

Für die einfache Zinsrechnung gelten die folgenden Formeln:

$$Z = K \cdot \frac{p}{100}$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich die Zinsen für ein Jahr berechnen.

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich die Zinsen für t Tage berechnen.

Z gibt die Zinsen an, K steht für das Kapital, p für den Zinssatz in Prozent und t für die Anzahl der Tage.

Diese Formeln können auch nach K, p oder t umgestellt werden.

Hinweis: In der Zinsrechnung wird jeder Monat mit 30 Tagen gerechnet!

Die Lösung über einen Dreisatz wird in den Musterlösungen dargestellt.

Aufgabe 102

Aufgaben zur Zinsrechnung lassen sich sowohl mit Hilfe von entsprechenden Formeln als auch mit Hilfe eines Dreisatzes lösen. In manchen Fällen reicht sogar ein Zweisatz.

1. Lösung mit Hilfe der Zinseszinsformel

Da die 1.000,00 € für zwei Jahre angelegt werden sollen und in diesem Zeitraum kein Geld abgehoben werden soll, handelt es sich hierbei um Zinseszinsrechnung. Das heißt, die Zinsen, die nach einem Jahr von der Bank gut geschrieben werden, werden nicht vom Kunden abgehoben, sondern für das zweite Jahr den 1.000,00 € zugerechnet und mit verzinst.

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

K_n gibt das Gesamtkapital nach n Jahren an.

K_0 ist das Anfangskapital.

$q = 1 + \frac{p}{100}$ ist der Aufzinsungsfaktor.

p ist der Zinssatz in Prozent.

n ist die Laufzeit in Jahren.

Gegeben ist: $K_0 = 1.000{,}00€$

$p = 10\% \quad \Rightarrow \quad q = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$

$n = 2$ Jahre

Gesucht ist: $K_n - K_0$, also der Betrag, um den sich das Anfangskapital vermehrt hat.

Lösung:

$$K_n - K_0 = K_0 \cdot q^n - K_0$$

$$\Rightarrow \quad K_n - K_0 = 1000{,}00€ \cdot 1{,}1^2 - 1.000{,}00€$$

$$= 1.000{,}00€ \cdot 1{,}21 - 1.000{,}00€$$

$$= 1.210{,}00€ - 1.000{,}00€$$

$$= 210{,}00€$$

2. Lösung in mehreren kleinen Schritten über einen Zweisatz

Schritt 1: Berechnung der Zinsen nach einem Jahr (Zweisatz)

:10

$$100\% = 1.000{,}00€$$
$$10\% = 100{,}00€$$

:10

Schritt 2: Berechnung des Kapitals am Ende des 1.Jahres

$$1.000{,}00€ + 100{,}00€ = 1.100{,}00€$$

Schritt 3: Berechnung der Zinsen für das 2.Jahr (Zweisatz)

:10

$$100\% = 1.100{,}00€$$
$$10\% = 110{,}00€$$

:10

Schritt 4: Berechnung der gesamten Zinsen für das 1. und 2.Jahr

$$100{,}00€ + 110{,}00€ = 210{,}00€$$

Aufgabe 103

1. Lösung mit Hilfe einer Formel

$$K = Z \cdot \frac{100}{p}$$

K ist das Kapital.

Z sind die Zinsen für ein Jahr.

p ist der Zinssatz in Prozent.

Gegeben ist: $Z = 240{,}00€$

$p = 3\%$

Gesucht ist: K

Lösung: $$K = Z \cdot \frac{100}{p}$$

$\Rightarrow \quad K = 240{,}00€ \cdot \dfrac{100}{3}$

$\Leftrightarrow \quad K = 8.000{,}00€$

2. Lösung mit Hilfe eines Dreisatzes

$\boxed{:3}$ $\quad 3\% = 240{,}00€ \quad$ $\boxed{:3}$

$1\% = 80{,}00€$

$\boxed{\cdot 100}$ $\quad 100\% = 8.000{,}00€ \quad$ $\boxed{\cdot 100}$

Hinweis: Das Kapital entspricht 100%.

Damit beträgt das gesuchte Kapital $8.000{,}00€$.

Themenbereich XI

Prozentrechnung

Aufgaben zur Prozentrechnung lassen sich entweder mit der Hilfe von Formeln oder über einen Dreisatz lösen.

Die Formeln lauten

für den Prozentwert PW: $PW = G \cdot \frac{p}{100}$,

für den Grundwert G: $G = PW \cdot \frac{100}{p}$,

für den Prozentsatz p: $p = \frac{PW}{G} \cdot 100$.

Sowohl die Anwendung der Formeln als auch die Lösung über einen Dreisatz werden in den folgenden Musterlösungen dargestellt.

Aufgabe 104

Auch die Aufgaben zur Prozentrechnung lassen sich sowohl mit Formeln als auch mit einem Dreisatz lösen.

1. Lösung mit Hilfe einer Formel

$$p = \frac{PW}{G} \cdot 100$$

p ist der Prozentsatz.

PW ist der Prozentwert.

G ist der Grundwert.

Gegeben ist: $G = 6{,}3$ Milliarden Banknoten (alle gedruckten Banknoten)

$PW = 1{,}89$ Milliarden 20€ - Scheine (absoluter Anteil der 20€ - Scheine)

Gesucht ist: p

Lösung: $p = \frac{PW}{G} \cdot 100$

$\Rightarrow \quad p = \frac{1{,}89 Milliarden}{6{,}3 Milliarden} \cdot 100$ / kürzen der Milliarden

$\Leftrightarrow \quad p = \frac{1{,}89}{6{,}3} \cdot 100$

$\Leftrightarrow \quad p = \frac{189}{6{,}3}$

$\Leftrightarrow \quad p = 30\%$

2. Lösung mit Hilfe eines Dreisatzes

$$\begin{array}{lcl} & 6{,}3 Milliarden = 100\% & \\ :10 & & :10 \\ & 0{,}63 Milliarden = 10\% & \\ \cdot 3 & & \cdot 3 \\ & 1{,}89 Milliarden = 30\% & \end{array}$$

Hinweis: Alle gedruckten Banknoten entsprechen 100%.

Aufgabe 105

1. Lösung mit Hilfe einer Formel

$$p = \frac{PW}{G} \cdot 100$$

p ist der Prozentsatz.

PW ist der Prozentwert.

G ist der Grundwert.

Gegeben ist: $G = 1000{,}00€$ (ist der alte Preis)

Achtung: Die $640{,}00€$ geben den neuen Preis an und nicht die Preissenkung. Da aber nach der Höhe der Preissenkung in Prozent gefragt ist, muss zunächst ausgerechnet werden, wie viel $€$ die Preissenkung beträgt:

$PW = 1000{,}00€ - 640{,}00€ = 360{,}00€$ (ist die Preissenkung)

Gesucht ist: p

Lösung: $$p = \frac{PW}{G} \cdot 100$$

$\Rightarrow$ $$p = \frac{360{,}00€}{1000{,}00€} \cdot 100$$

$\Leftrightarrow$ $$p = 36\%$$

2. Lösung mit Hilfe eines Dreisatzes

$$\begin{aligned} &1.000{,}00€ = 100\% \\ :100 \quad &\downarrow \quad :100 \\ &10{,}00€ = 1\% \\ \cdot 36 \quad &\downarrow \quad \cdot 36 \\ &360{,}00€ = 36\% \end{aligned}$$

Themenbereich XII

Verständnis von Graphen

(ohne trigonometrische Funktionen, Logarithmus- und Exponentialfunktion)

In diesem Themenbereich werden Aufgaben zum Verständnis von Graphen gestellt.

Dabei kann es sich z.B. um die folgenden Aufgabentypen handeln:

- → Es sollen Aussagen über das Aussehen/ den Graphen einer bestimmten Funktion getroffen werden.
- → Einem Graphen soll die entsprechende Funktionsgleichung zugeordnet werden.
- → Einem Sachverhalt aus einer Textaufgabe soll ein passender Graph zugeordnet werden.

Für die Lösung dieser Aufgaben werden überwiegend Kenntnisse über lineare Funktionen (Geraden) und quadratische Funktionen (Parabeln) benötigt.

Aufgabe 106

Bei dieser Aufgabe ist die Parabel in der sogenannten Scheitelpunktform angegeben. Die allgemeine Scheitelpunktform lautet:

$$y = (x - x_0)^2 + y_0$$

Aus der Scheitelpunktform kann der Scheitelpunkt direkt abgelesen werden. Der Scheitelpunkt lautet:

$$S = (x_0, y_0)$$

Der Scheitelpunkt der Parabel $y = (x-2)^2 - 1$ lautet somit $S(2,-1)$. Dieser Punkt liegt im

IV. Quadranten.

Aufgabe 107

Da x die Zeit in Stunden und y den Treibstoff im Tank in Liter angibt, lässt sich aus dem Satz: „Ihr Tank ist mit 600 Liter vollgefüllt.“ folgern, dass zum Zeitpunkt x=0 Stunden der Tank mit y=600 Liter gefüllt ist. Daher kann die Lösung d nicht richtig sein.

Aus der Aussage: „Die Diesellokomotive verbraucht … Treibstoff … “ lässt sich folgern, dass der Graph fallend verlaufen muss. Damit kann auch die Lösung b nicht richtig sein.

Bei der Lösung a ist der Graph auch für negative x gezeichnet. Negative x – Werte bedeuten hier eine negative Anzahl von Stunden, was völlig unsinnig ist. Also ist auch Lösung a nicht richtig.

Übrig bleibt nur die Lösung c. Zur Kontrolle kann hier über die Bedeutung des Punktes (12,0) nachgedacht werden. x=12 Stunden und y=0 Liter bedeutet, dass nach 12 Stunden der vollgefüllte Tank der Lokomotive leer ist (y=0). Da zu Beginn 600 Liter im Tank waren und die Lokomotive 50 Liter pro Stunde verbraucht, kann folgendermaßen gerechnet werden:
600 Liter : 50 Liter/Stunde = 12 Stunden. Das heißt, der Tank ist nach zwölf Stunden leer und somit ist die Lösung c richtig.

Themenbereich XIII

Wahrscheinlichkeitsrechnung

In diesem Themenbereich geht es um Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik.

Es geht unter anderem um ein- und mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramme, Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Fakultäten.

Aufgabe 108

Die Lösung dieser Aufgabe erfordert die Kenntnis der sogenannten Fakultät:

Für alle natürlichen Zahlen n ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ als das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n definiert. Gelesen wird $n!$ als „n Fakultät“.

Beispiele: $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Wenn fünf verschiedene Mathematikbücher in unterschiedlicher Reihenfolge in ein Regal gestellt werden sollen, dann gibt es

→ für das erste Buch fünf Plätze im Regal zur freien Auswahl,

→ für das zweite Buch bleiben dann noch vier Plätze im Regal zur freien Auswahl übrig, da das erste Buch bereits einen Platz belegt,

→ für das dritte Buch sind dann noch drei Plätze im Regal zur freien Auswahl übrig,

→ für das vierte Buch stehen dann noch zwei Plätze im Regal zur freien Auswahl zur Verfügung und

→ für das fünfte und letzte Buch ist dann nur noch ein Platz im Regal frei.

Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies, es gibt

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

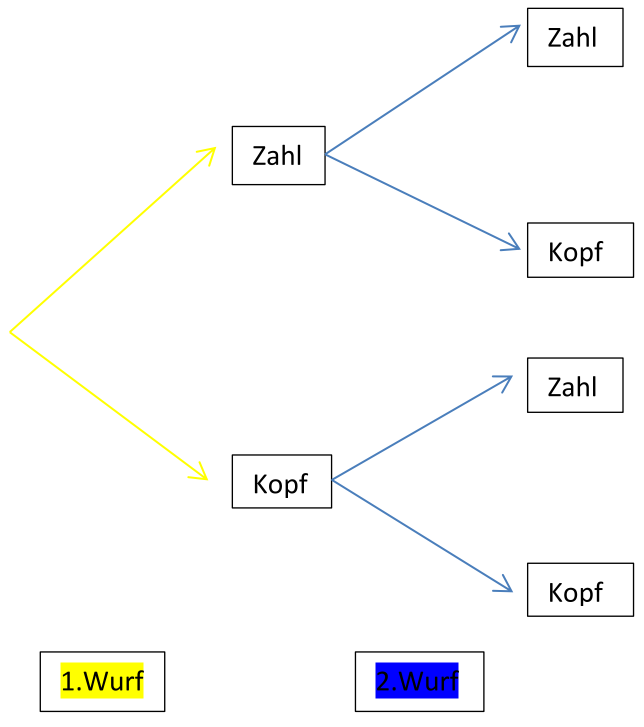
verschiedene Möglichkeiten, fünf Mathematikbücher in unterschiedlicher Reihenfolge in ein Regalfach zu stellen.

Aufgabe 109

Für die Wahrscheinlichkeit P eines gewünschten Ereignisses E gilt:

$$P(E) = \frac{Anzahl\ der\ gewünschten\ Ereignisse\ E}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Ereignisse}$$

Zur Veranschaulichung des Sachverhaltes kann ein sogenanntes Baumdiagramm verwendet werden:



Beim 1.Wurf kann Zahl oder Kopf oben liegen. Beim 2.Wurf kann dann wiederum Zahl oder Kopf oben liegen. Insgesamt gibt es also vier Kombinationsmöglichkeiten:

(Zahl / Zahl), (Zahl / Kopf), (Kopf / Zahl), (Kopf / Kopf)

Nur eine von vier Möglichkeiten liefert das gewünschte Ergebnis, dass zweimal Zahl oben liegt. Damit gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(Zahl\,/\,Zahl) = \frac{1}{4}$$

Themenbereich XIV

Grundkenntnisse der trigonometrischen Funktionen

In diesem Themenbereich geht es insbesondere um die Sinus- , Kosinus- und Tangensfunktion.

Geprüft werden Kenntnisse über die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck, die Nullstellen der Sinus- und Kosinusfunktionen sowie einfache Symmetrieeigenschaften. Außerdem wird die Fähigkeit erwartet, Winkel vom Gradmaß in das Bogenmaß umzurechnen und umgekehrt.

Im rechtwinkligen Dreieck gelten die folgenden trigonometrischen Beziehungen:

$$\rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

$$\rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$$

$$\rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

Für die Umrechnung von Winkeln vom Gradmaß in das Bogenmaß und umgekehrt kann die folgende Formel verwendet werden:

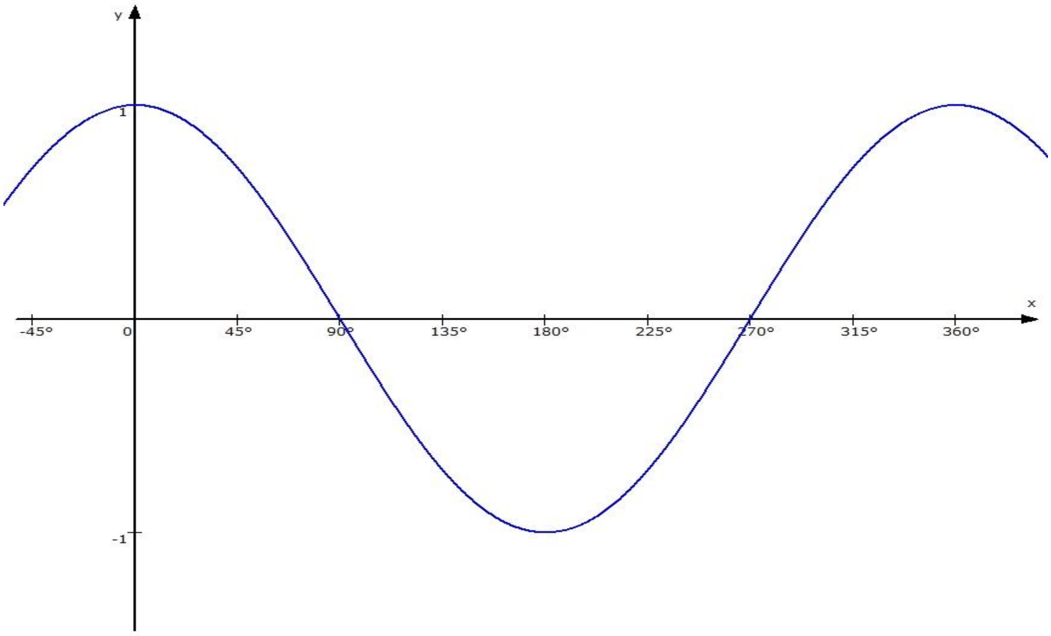
$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{x}{2\pi}$$

Aufgabe 160

Nullstellen sind die Stellen, an denen der Graph der Funktion die waagerechte Achse schneidet oder berührt.

Aus dem Graphen der Kosinusfunktion lassen sich die gesuchten Nullstellen der Funktion ablesen.

Die Kosinusfunktion besitzt im Intervall $0° \leq x \leq 360°$ die Nullstellen $90°$ und $270°$.



Aufgabe 161

Für die Umwandlung vom Gradmaß in das Bogenmaß und umgekehrt kann die folgende Beziehung verwendet werden:

$$\boxed{\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}}$$

Diese Beziehung gibt an, dass sich der Winkel α (im Gradmaß) zu 360° genauso verhält, wie die Bogenlänge x (im Bogenmaß) zu 2π .

Für $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} \qquad \text{/ vereinfachen der rechten Seite}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{1}} \qquad \text{/ Durch einen Bruch wird geteilt, indem mit}$$

dem Kehrwert multipliziert wird.

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \qquad \text{/ kürzen von } \pi$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{1}{4} \qquad / \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \qquad \alpha = 90^\circ$$

Themenbereich XV

Logarithmen

Für die Lösung der Aufgaben in diesem Themenbereich sollte zunächst einmal Klarheit darüber bestehen, was unter dem Begriff Logarithmus zu verstehen ist. Des Weiteren wird die Kenntnis der Rechenregeln für Logarithmen erwartet. Mit Hilfe dieser Regeln sollen logarithmische Terme zusammengefasst oder zerlegt werden. Außerdem können Aufgaben zum Lösen einfacher logarithmischer oder exponentieller Gleichungen gestellt werden.

Definition:

Die Exponentialgleichung $a^x = b$ besitzt für $a, b > 0$ und $a \neq 1$ die Lösung $x = \log_a(b)$ und heißt Logarithmus von b zur Basis a.

Rechenregeln für Logarithmen:

$$\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u \cdot v)$$

$$\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$\log_a(u^w) = w \cdot \log_a(u)$$

Besondere Logarithmen:

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(1) = 0$$

Aufgabe 162

Für die Lösung dieser Aufgabe ist die Kenntnis der Rechenregeln für Logarithmen erforderlich:

$$\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u \cdot v)$$

$$\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$\log_a(u^w) = w \cdot \log_a(u)$$

$\log_a ab^2$	/ Zur Verdeutlichung der Rechenregeln werden Klammern um das Argument gesetzt.
$= \log_a(ab^2)$	/ Anwendung der ersten Rechenregel $\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u \cdot v)$
$= \log_a(a) + \log_a(b^2)$	/ Anwendung der dritten Rechenregel $\log_a(u^w) = w \cdot \log_a(u)$
$= \log_a(a) + 2 \cdot \log_a(b)$	/ $\log_a(a) = 1$, da $a^1 = a$
$= 1 + 2\log_a(b)$	

Aufgabe 163

Die Exponentialgleichung $a^x = b$ besitzt für $a,b > 0$ und $a \neq 1$ die Lösung $x = \log_a(b)$ und heißt Logarithmus von b zur Basis a.

Die Lösung der Gleichung $2^x = 12$ lautet daher $x = \log_2(12)$.

Die Klammer um das Argument darf auch weggelassen werden. Die Lösung lautet dann

$x = \log_2 12$.

Themenbereich XVI

Verständnis von Graphen

(inklusive trigonometrische Funktionen, Logarithmus- und Exponentialfunktion)

In diesem Themenbereich werden Aufgaben zum Verständnis von Graphen gestellt.

Dabei kann es sich z.B. um die folgenden Aufgabentypen handeln:

→ Es sollen Aussagen über das Aussehen/ den Graphen einer bestimmten Funktion getroffen werden.

→ Einem Graphen soll die entsprechende Funktionsgleichung zugeordnet werden.

→ Einem Sachverhalt aus einer Textaufgabe soll ein passender Graph zugeordnet werden.

Aufgabe 164

Bei der abgebildeten Funktion handelt es sich um eine harmonische Schwingung, die in der allgemeinen Form $y = A \cdot \cos(\alpha x)$ dargestellt werden kann.

Das A wird als Amplitude bezeichnet und der Betrag von A gibt die Streckung oder Stauchung des Graphen im Vergleich zur Grundfunktion $y = \cos(x)$ an.

Wenn $|A|$ > 1, dann ist der Graph der Funktion mit dem Faktor $|A|$ gestreckt.
Wenn $|A|$ < 1, dann ist der Graph der Funktion mit dem Faktor $|A|$ gestaucht.

Die Periodenlänge p der Funktion errechnet sich aus der Formel $p = \frac{2\pi}{\alpha}$. Die Periodenlänge gibt an, auf welchem Bereich der Graph der Funktion eine vollständige Schwingung durchläuft.

Die Grundfunktion $y = \cos(x)$ besitzt zum Beispiel die Amplitude $A = 1$ und die Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

Aus dem dargestellten Graphen lässt sich ablesen, dass die Amplitude $A = 2$ und die Periodenlänge $p = \pi \approx 3{,}14$ beträgt.

Damit kann die Lösung a ausgeschlossen werden, da die Amplitude dort $A = 1$ ist.

Mit Hilfe der Formel für die Periodenlänge kann Alpha berechnet werden:

	$p = \frac{2\pi}{\alpha}$	$/ \cdot \alpha$
$\Leftrightarrow$	$\alpha \cdot p = 2\pi$	$/ : p$
$\Leftrightarrow$	$\alpha = \frac{2\pi}{p}$	/ Bei dem abgebildeten Graphen ist $p = \pi$.
$\Rightarrow$	$\alpha = \frac{2\pi}{\pi} = 2$	

Die richtige Lösung ist also d.

Aufgabe 165

Bei der Funktion $f(x) = 25 - 5^x$ handelt es sich um eine Exponentialfunktion, da die Variable x im Exponenten steht.

Am leichtesten lässt sich der richtige Graph finden, wenn markante Punkte des Graphen betrachtet werden. Insbesondere die Schnittpunkte mit den Achsen können sehr aufschlussreich sein.

Alle Schnittpunkte mit der y-Achse haben gemeinsam, dass die x-Koordinate null ist. Damit kann die zugehörige y-Koordinate berechnet werden.

$$y = f(0) = 25 - 5^0 = 25 - 1 = 24$$

$\Rightarrow$ Lösung c und d sind auszuschließen, da bei Lösung c die y-Koordinate 25 beträgt und bei Lösung d ist y ein Wert knapp über null.

Alle Schnittpunkte mit der x-Achse haben gemeinsam, dass die y-Koordinate null ist. Abbildung a zeigt keinen Schnittpunkt mit der x-Achse. Deshalb kann noch keine Aussage darüber getroffen werden, ob a richtig oder falsch ist. Abbildung b besitzt einen Schnittpunkt mit der x-Achse an der Stelle x=2. Wenn Lösung b richtig sein soll, dann muss $y = f(2) = 0$ sein.

Überprüfung: $y = f(2) = 25 - 5^2 = 0$

$\Rightarrow$ Die richtige Lösung ist b.

Themenbereich XVII

Grenzwerte

In diesem Themenbereich werden grundlegende Kenntnisse über Grenzwerte von Folgen und Funktionen erwartet. Insbesondere sollen Aussagen über das Verhalten einer Folge/ Funktion im Unendlichen bzw. an einer konkreten Stelle getroffen werden. Eine Unterscheidung in links- und rechtsseitige Grenzwerte wird aber nicht erwartet. Auch die Grenzwertregeln von Bernoulli und de L'Hospital sind hier nicht prüfungsrelevant.

Aufgabe 166

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n =$$

Bei der Lösung dieser Aufgabe können die folgenden Überlegungen hilfreich sein:

$\rightarrow$ $\sqrt{2}$ ist eine Zahl, die größer als 1 ist.

$\rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist eine Zahl, die zwischen 0 und 1 liegt.

$\rightarrow$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist eine Zahl, die zwischen -1 und 0 liegt.

$\rightarrow$ Für n dürfen ausschließlich natürliche Zahlen (positive ganze Zahlen) eingesetzt werden, da es sich bei dem angegebenen Term $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ um eine Folge handelt.

$\rightarrow$ Eine Zahl, die negativ ist und mit einer natürlichen Zahl potenziert wird, wechselt ihr Vorzeichen, je nachdem, ob der Exponent gerade oder ungerade ist.

Beispiele: $(-3)^2 = 9$, $(-3)^3 = -27$, $(-3)^4 = 81$, $(-3)^5 = -243$

$\rightarrow$ Eine Zahl, die zwischen -1 und 0 liegt und mit einer immer größer werdenden natürlichen Zahl potenziert wird, nähert sich immer mehr null an.

Beispiele: $(-0{,}1)^2 = 0{,}01$, $(-0{,}1)^3 = -0{,}001$, $(-0{,}1)^4 = 0{,}0001$,

$(-0{,}1)^5 = -0{,}00001$, $(-0{,}1)^6 = 0{,}000001$

Auf Grund dieser Überlegungen lautet die Lösung:

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$$

Aufgabe 167

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-4n}{5-4n^3}$$

/ Der Grenzwert kann vom Zähler und Nenner getrennt berechnet werden.

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2n^3-4n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(5-4n^3)}$$

/ Sowohl der Zähler als auch der Nenner enthalten einen ganzrationalen Term. Bei ganzrationalen Termen entscheidet das n mit dem höchsten Exponenten über das Verhalten im Unendlichen. Daher gilt für den Zähler $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^3-4n)=\infty$ und für den Nenner $\lim\limits_{n\to\infty}(5-4n^3)=-\infty$.

Zusammen gefasst lässt sich schreiben:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-4n}{5-4n^3}=\frac{\infty}{-\infty}$. Der Ausdruck $\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]$ wird als „unbestimmter Ausdruck“ bezeichnet, da an dieser Stelle noch nicht gesagt werden kann, was das Ergebnis dieses Ausdrucks ist. Um das Ergebnis bestimmen zu können, sind Umformungen erforderlich. Das n mit dem höchsten Exponenten wird sowohl im Zähler als auch im Nenner ausgeklammert.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\left(2-\frac{4}{n^2}\right)}{n^3\cdot\left(\frac{5}{n^3}-4\right)}$$

/ kürzen von n^3

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2 - \frac{4}{n^2}}{\frac{5}{n^3} - 4}$$

/ Die Brüche $\frac{4}{n^2}$ und $\frac{5}{n^3}$ werden als „Nullfolgen“ bezeichnet, da sie für $n \to \infty$ gegen null streben.

Übrig bleiben die 2 im Zähler und die -4 im Nenner.

$$= \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Themenbereich XVIII

Grundkenntnisse der Differentialrechnung

In diesem Themenbereich werden folgende Grundkenntnisse der Differentialrechnung erwartet:

→ Was ist eine Ableitung und was kann mit ihrer Hilfe berechnet werden?

→ Berechnung einfacher Ableitungen (ohne Produkt-, Quotienten- und Kettenregel)

→ Berechnung von Extremstellen einfacher Funktionen

Aufgabe 168

Für die Ableitung $f'(x)$ einer Potenzfunktion $f(x) = ax^n$ gilt:

$$\boxed{f(x) = ax^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot ax^{n-1}}$$

Um die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ableiten zu können, wird die Funktion mit Hilfe der Regel $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ umgeschrieben:

$$f(x) = \sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$$

Die Ableitung lautet dann:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

Negative Exponenten werden mit Hilfe der Regel $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ umgeschrieben:

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

Auch Brüche im Exponenten werden umgeschrieben $\left(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \right)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Aufgabe 169

Mit Hilfe der Ableitung einer Funktion kann die Steigung der Funktion an einer bestimmten Stelle x berechnet werden.

Bei der gegebenen Funktion handelt es sich um eine Differenz von Potenzfunktionen. Für die Ableitung einer Potenzfunktion gilt:

$$f(x) = ax^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

Die Ableitung der gegebenen Funktion lautet:

$$f(x) = 4x^3 - x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot 4x^{3-1} - 2 \cdot x^{2-1} = 12x^2 - 2x$$

Die Steigung an der Stelle $x = 1$ entspricht der ersten Ableitung an dieser Stelle:

$$f'(1) = 12 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 12 - 2 = 10$$

Themenbereich XIX

Grundkenntnisse der Integralrechnung

In diesem Themenbereich sollen einfache Aufgaben zur Integralrechnung gelöst werden. Die Berechnung von Flächeninhalten kann Bestandteil dieser Aufgaben sein. Es werden jedoch keine speziellen Verfahren wie z.B. Substitution, partielle Integration oder Partialbruchzerlegung erwartet.

Aufgabe 170

Für die Berechnung des Integrals kann die folgende Formel verwendet werden:

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c}$$

Bevor diese Formel angewendet werden kann, muss die Funktion so umgeschrieben werden, dass das x nicht mehr im Nenner des Bruches steht. Hierzu wird die Umschreibregel $\boxed{\frac{1}{x^n} = x^{-n}}$ benutzt.

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx$$ / umschreiben: $\boxed{\frac{1}{x^n} = x^{-n}}$

$$= \int (x+1)^{-2} dx$$ / integrieren: $\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c}$

$$= \frac{1}{-2+1} \cdot (x+1)^{-2+1} + c$$ / zusammenfassen

$$= -(x+1)^{-1} + c$$ / negative Exponenten wieder zu positiven

Exponenten umschreiben: $\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$

$$= -\frac{1}{(x+1)^1} + c$$

Die richtige Lösung ist c.

Aufgabe 171

Für die Berechnung des Flächeninhaltes, den die Funktion mit der x-Achse einschließt, werden zunächst die Nullstellen der Funktion berechnet:

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad -x^2+1=0 \quad / -1$$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2=-1 \quad / :(-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2=1 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1=-1 \quad \wedge \quad x_2=1$$

Die Nullstellen sind die Grenzen, in denen das Integral berechnet wird:

$$\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx \qquad \text{/ integrieren:} \quad \int ax^n dx=\frac{1}{n+1}ax^{n+1}+c$$

$$=[-\frac{1}{3}x^3+x+c]_{-1}^{1}$$ / Zuerst die obere Grenze für x einsetzen und dann die untere.

$$=-\frac{1}{3}\cdot 1^3+1+c-(-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+(-1)+c)$$ / vereinfachen

$$=-\frac{1}{3}+1+c-\frac{1}{3}+1-c$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{3}{3}+c-\frac{1}{3}+\frac{3}{3}-c$$

$$=\frac{4}{3}$$