

## C Aufgabenlösungen zu Kapitel 3

### C.1 Lösung der Übungsaufgabe 3.1

In Beispiel 3.5 (Buch S.92) wurde eine komplexe Abschlussimpedanz  $Z_A = (37,5 + j150) \Omega$  über eine Leitung mit der Länge  $l_e/\lambda = 0,194$  und dem Leitungswellenwiderstand  $Z_L = 75 \Omega$  transformiert. Mit dem Smith-Diagramm haben wir *graphisch* eine Lösung konstruiert und die Eingangsimpedanz  $Z_E \approx (15 - j75) \Omega$  erhalten. Das Smith-Chart erlaubt uns also die rasche graphische Ermittlung der Eingangsimpedanz einer Leitung unter Umgehung der komplexen Rechnung.

Wir ermitteln nun zum Vergleich die Eingangsimpedanz  $Z_E$  *rechnerisch* mit Gleichung (3.74)

$$Z_E = Z_A \cdot \frac{1 + j \frac{Z_L}{Z_A} \tan(\beta l_e)}{1 + j \frac{Z_A}{Z_L} \tan(\beta l_e)} \quad (C.1)$$

Die komplexe Rechnung führen wir sinnvollerweise nicht von Hand, sondern mit MATLAB [Matl10] durch und erhalten unmittelbar  $Z_E = (14,6 - j75,2) \Omega$ . Das Ergebnis stimmt gut mit der graphischen Lösung (Smith Chart) überein.

### C.2 Lösung der Übungsaufgabe 3.2

In Bild 3.24 (Buch S.104) sind alle benötigten Gleichungen zusammengetragen. Wir berechnen die neuen Zahlenwerte für die Widerstandswerte  $R_I = 15 \Omega$  und  $R_A = 10 \Omega$  mit den Reflexionsfaktoren am Anfang und Ende der Leitung

$$r_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L} = -0,538 \quad \text{und} \quad r_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L} = -0,667 \quad (C.2)$$

Für die hin- und rücklaufenden Impulse erhalten wir folgende Werte:

$$U_{1h} = U_0 \frac{Z_L}{R_I + Z_L} = 769 \text{ mV} \quad (C.3)$$

$$U_{1r} = r_A U_{1h} = -513 \text{ mV} \quad (C.4)$$

$$U_{2h} = r_I r_A U_{1h} = 276 \text{ mV} \quad (C.5)$$

$$U_{2r} = r_I r_A^2 U_{1h} = -184 \text{ mV} \quad (C.6)$$

$$U_{3h} = r_I^2 r_A^2 U_{1h} = 99,1 \text{ mV} \quad (C.7)$$

An den Leitungsenden überlagern sich dann jeweils ankommende und reflektierte Impulse, so dass wir folgende Amplituden am Eingang beobachten können:

$$u_E(t) = U_{1h} = 769 \text{ mV} \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq t_p \quad (\text{C.8})$$

$$u_E(t) = (1+r_1)U_{1r} = -237 \text{ mV} \quad \text{für} \quad 2t_D \leq t \leq 2t_D + t_p \quad (\text{C.9})$$

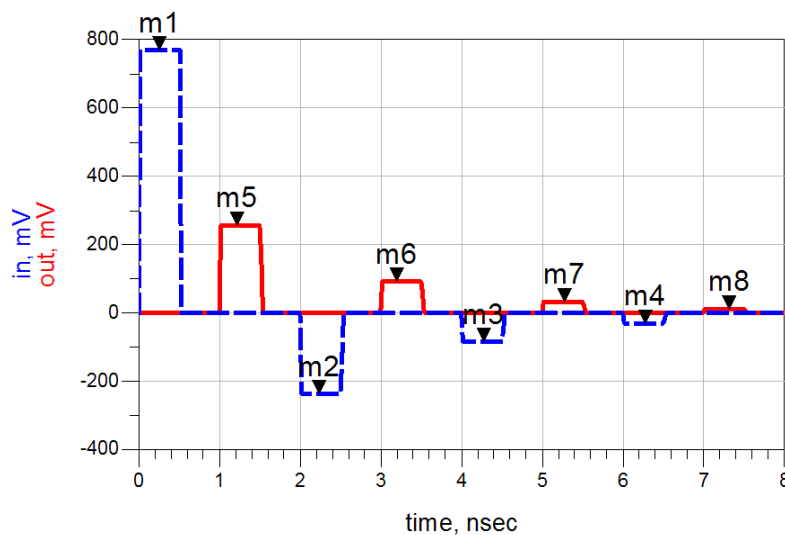
$$u_E(t) = (1+r_1)U_{2r} = -85 \text{ mV} \quad \text{für} \quad 4t_D \leq t \leq 4t_D + t_p \quad (\text{C.10})$$

Am Ausgang berechnen wir entsprechend:

$$u_A(t) = (1+r_A)U_{1h} = 256 \text{ mV} \quad \text{für} \quad t_D \leq t \leq t_D + t_p \quad (\text{C.11})$$

$$u_A(t) = (1+r_A)U_{2h} = 92 \text{ mV} \quad \text{für} \quad 3t_D \leq t \leq 3t_D + t_p \quad (\text{C.12})$$

m1 in=0.769	m2 in=-0.237	m3 in=-0.085	m4 in=-0.031
m5 out=0.256	m6 out=0.092	m7 out=0.033	m8 out=0.012



**Bild C.1** Darstellung der Ergebnisse mit dem HF-Schaltungssimulator ADS

### C.3 Lösung der Übungsaufgabe 3.3

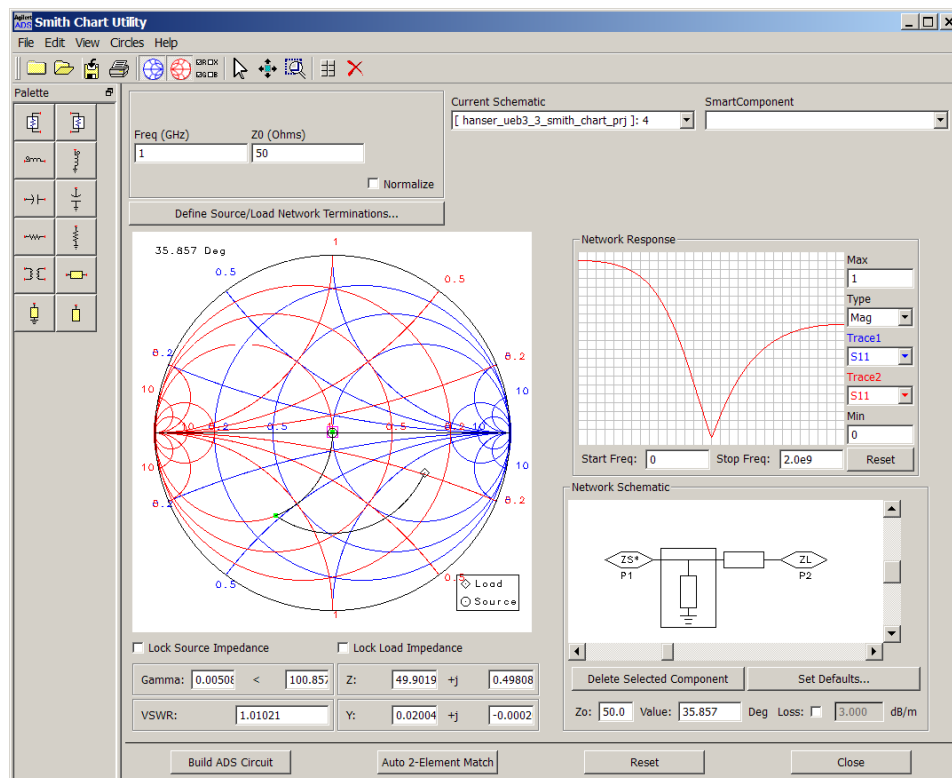
Die Abschlussimpedanz  $Z_A = (120 - j80)\Omega$  wird über eine serielle  $50\text{-}\Omega$ -Leitung sowie eine an ihrem Ende kurzgeschlossene  $50\text{-}\Omega$ -Stichleitung an eine  $50\text{-}\Omega$ -Quelle angepasst ( $f = 1 \text{ GHz}$ ).

Die Aufgabe wird am einfachsten mit einem computerunterstützten Smith-Chart-Tool gelöst. Solche Softwaretools werden kostenfrei oder zur Evaluation im Internet zum Download angeboten (z.B. [Dell10]).

Bild C.2 zeigt die Lösung des Problems mit dem kommerziellen Programm ADS (*Advanced Design System*) der Firma Agilent [Agil09].

Da die Leitungen einen Wellenwiderstand von  $Z_L = 50 \Omega$  besitzen, wird die Abschlussimpedanz – normiert auf  $50 \Omega$  – im Smith-Chart eingetragen (*Load*). Da die Eingangsimpedanz der Schaltung  $Z_E = 50 \Omega$  betragen soll, liegt unser Zielpunkt in der Mitte des Diagramms (*Source*).

Über die serielle Leitung wird dieser Punkt im Uhrzeigersinn bis zum Anpassungskreis in der Admittanzebene (rote Kurven) gedreht. Auf dem Anpassungskreis bewegen wir uns dann mit der parallelen kurzgeschlossenen Leitung bis zum Anpassungspunkt.

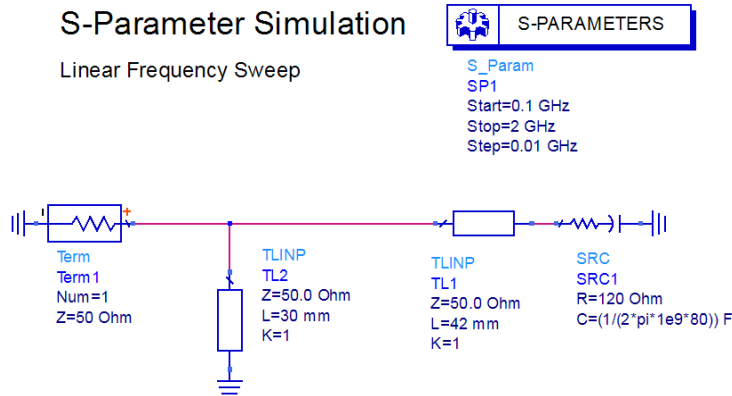


**Bild C.2** Entwurf des Anpassnetzwerkes mit dem Smith-Chart-Tool in ADS

Das Programm zeigt uns die Schaltung und gibt die elektrischen Leitungslängen in Grad an:  $50,461^\circ$  für die serielle Leitung und  $35,987^\circ$  für die parallele Sticleitung. Diese elektrischen Längen können wir für die luftgefüllte Leitung ( $c = c_0$ ) über die Wellenlänge bei  $f = 1$  GHz in geometrische Längen umrechnen. Es gilt:

$$\frac{\ell_{\text{seriell}}}{\lambda} = \frac{50,461^\circ}{360^\circ} \rightarrow \ell_{\text{seriell}} = \frac{50,461^\circ}{360^\circ} \lambda = \frac{50,461^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{c_0}{f} = 4,2 \text{ cm} \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\ell_{\text{stubb}}}{\lambda} = \frac{35,857^\circ}{360^\circ} \rightarrow \ell_{\text{stubb}} = \frac{35,857^\circ}{360^\circ} \lambda = \frac{35,857^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{c_0}{f} = 3,0 \text{ cm} \quad (\text{C.14})$$



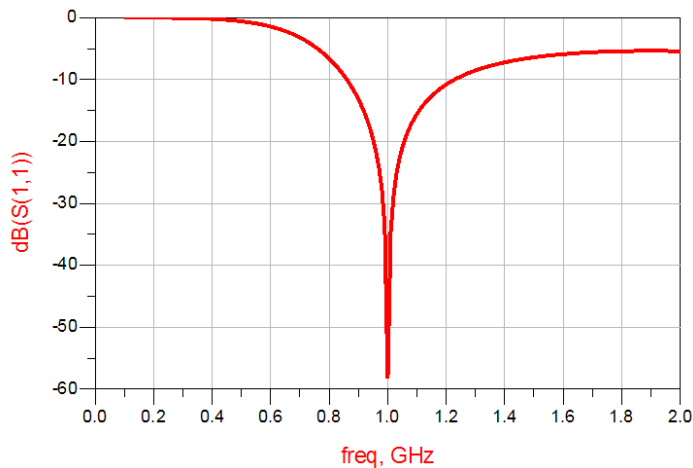
**Bild C.3** Anpassschaltung zu Übungsaufgabe 3.3

Bild C.3 zeigt die Untersuchung der konzipierten Anpassschaltung mit dem Schaltungssimulator ADS. Als Leitungssegmente werden physikalische Leitungsmodelle (TLINP= *Transmission Line Physical*) verwendet mit dem Leitungswellenwiderstand  $Z = Z_L = 50 \Omega$ , der geometrischen Länge  $L$  und der relativen Dielektrizitätszahl  $K = \epsilon_r = 1$ .

Der negative Wert der Reaktanz  $X_A = -j80 \Omega$  bei einer Frequenz von  $f = 1 \text{ GHz}$  wird durch eine Kapazität realisiert.

$$jX_A = -j80 \Omega = \frac{1}{j\omega C} \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega 80 \Omega} \quad (\text{C.15})$$

Die Ergebnisse der Streuparameter sind in Bild C.4 dargestellt. Wie erwartet liegt bei einer Frequenz von  $f = 1 \text{ GHz}$  Anpassung vor.



**Bild C.4** Anpassung bei einer Frequenz von  $f = 1 \text{ GHz}$

## C.4 Lösung der Übungsaufgabe 3.4

### 1. Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Nach Gleichung (2.84) ist bei dielektrischem Füllmaterial ( $\mu_r = 1$ )

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = 2,5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 83,3\% c_0 . \quad (\text{C.16})$$

### 2. Berechnung des Leitungswellenwiderstandes

Wir erhalten über Gleichung (3.64) mit

$$Z_L = \frac{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}{c_0 C'} \quad \text{und} \quad C' = \frac{C}{\ell} \quad \text{sowie} \quad \mu_r = 1 \quad (\text{C.17})$$

schließlich

$$Z_L = 32 \Omega . \quad (\text{C.18})$$

### 3. Induktivitätsbelag

Den Induktivitätsbelag  $L'$  berechnen wir, indem wir Gleichung (3.62)

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (\text{C.19})$$

nach  $L'$  umstellen. Dies ergibt

$$L' = Z_L^2 C' = 128 \frac{\text{nH}}{\text{m}} . \quad (\text{C.20})$$

### 4. Ausbreitungskonstante

Gleichung (3.60) liefert uns unmittelbar die Ausbreitungskonstante

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{L'C'} = j6,28 \frac{1}{\text{m}} . \quad (\text{C.21})$$

Alternativ können wir auch den Weg über die Phasenkonstante wählen, denn es gilt

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r} f} = 1 \text{ m} . \quad (\text{C.22})$$

Also

$$\gamma = j\beta = j \frac{2\pi}{1 \text{ m}} = j6,28 \frac{1}{\text{m}} . \quad (\text{C.23})$$

## 5. Eingangsimpedanz

In vorhergehenden Aufgabenteil haben wir eine Wellenlänge von

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r} f} = 1 \text{ m} \quad (\text{C.24})$$

berechnet. Die Leitung ist mit einer Länge von  $\ell = 0,25 \text{ m} = \lambda/4$  gerade eben eine Viertelwellenlänge lang. In Abschnitt 3.1.8.3 (Buch S.83) hatten wir gesehen, dass eine leerlaufende  $\lambda/4$ -lange Leitung sich an ihrem Eingang gerade wie ein Kurzschluss verhält.

$$Z_E = 0 \Omega \text{ (Eingangsimpedanz)} \quad (\text{C.25})$$

## C.5 Lösung der Übungsaufgabe 3.5

### 1. Bestimmung der Leitungslänge

Aus dem Verlauf von  $u_A(t)$  geht hervor, dass der am Eingang eingespeiste Spannungssprung nach der Zeit  $t_0 = 200 \text{ ns}$  das Ende der Leitung erreicht. Die Länge der Leitung können wir einfach mit der kinematischen Grundgleichung  $v = s/t$  über die Laufzeit  $t_0$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v = c = c_0$  berechnen.

$$\ell = c_0 t_0 = 60 \text{ m} \quad (\text{C.26})$$

### 2. Berechnung der Elementwerte $R_{AS}$ , $R_{AP}$ und $C$

Wir betrachten die Ausgangsspannung  $u_A(t)$ . Zum Zeitpunkt  $t_0 = 200 \text{ ns}$  erreicht der Spannungssprung das Leitungsende. Die Spannung an der Kapazität ist stetig und verhält sich daher in dem Moment wie ein Kurzschluss. Wirksame Abschlussimpedanz ist folglich die Parallelschaltung von  $R_{AS}$  und  $R_{AP}$ .

$$Z_{A0} = R_{AP} \parallel R_{AS} \quad (\text{C.27})$$

Der Reflexionsfaktor in diesem Moment lautet

$$r_{A0} = \frac{Z_{A0} - Z_L}{Z_{A0} + Z_L} \quad (\text{C.28})$$

Die Amplitude der Ausgangsspannung zum Zeitpunkt  $t_0$  können wir nach Bild 3.22 dann berechnen.

$$u(t_0) = U_{1h}(1 + r_{A0}) \quad (\text{C.29})$$

Nach Bild 3.27 muss dies gerade einem Wert von  $0,8 \text{ V}$  entsprechen.

$$u(t_0) = U_{1h}(1 + r_{A0}) = 0,8 \text{ V} \quad (\text{C.30})$$

Aufgrund der Spannungsteilerregel am Anfang der Leitung ( $R_1 = Z_L$ ) beträgt die Spannung des hinlaufenden Spannungssprungs  $U_{\text{lh}} = 1 \text{ V}$ . Somit erhalten wir für den Reflexionsfaktor  $r_{A0}$  bzw. die Impedanz  $Z_{A0}$ .

$$r_{A0} = -0,2 \quad \text{und} \quad Z_{A0} = Z_L \frac{1+r_{A0}}{1-r_{A0}} = 16,67 \Omega = R_{\text{AP}} \parallel R_{\text{AS}} \quad (\text{C.31})$$

Wir betrachten nun die Ausgangsspannung  $u_A(t)$  für  $t \rightarrow \infty$ . Die Kapazität ist nun voll aufgeladen, es fließt also kein Strom, die Kapazität verhält sich daher wie ein Leerlauf. Als wirksame Abschlussimpedanz erhalten wir nun

$$Z_{A\infty} = R_{\text{AP}} \quad . \quad (\text{C.32})$$

Für  $t \rightarrow \infty$  haben wir Gleichstromverhältnisse, d.h. die verlustlose Leitung stellt einfach eine Durchverbindung dar. Wir können daher mit Hilfe der Spannungsteilerregel

$$\frac{u_A(t \rightarrow \infty)}{2\text{V}} = \frac{Z_{A\infty}}{R_1 + Z_{A\infty}} \quad (\text{C.33})$$

den Wert der Abschlussimpedanz berechnen mit

$$\boxed{Z_{A\infty} = R_{\text{AP}} = 80 \Omega} \quad . \quad (\text{C.34})$$

Da nun der Wert der Parallelschaltung von  $R_{\text{AS}}$  und  $R_{\text{AP}}$  sowie der Wert für  $R_{\text{AP}}$  bekannt sind, können wir  $R_{\text{AS}}$  berechnen.

$$\frac{1}{R_{\text{AP}}} + \frac{1}{R_{\text{AS}}} = \frac{1}{R_{\text{AP}} \parallel R_{\text{AS}}} \quad \rightarrow \quad \boxed{R_{\text{AS}} = 21 \Omega} \quad (\text{C.35})$$

Im Folgenden betrachten wir den zeitlichen Verlauf der Ausgangsspannung im Zeitintervall  $[t_0, \infty]$ . In diesem Zeitintervall wird die Kapazität aufgeladen. Der zeitliche Verlauf entspricht einer Exponentialfunktion mit einer Zeitkonstante, die neben dem Kapazitätswert auch vom wirksamen Widerstandswert abhängt.

Die Funktion, die die zeitliche Abhängigkeit der Ausgangsspannung beschreibt, ist aus den Grundlagen der Elektrotechnik bekannt und lautet:

$$u_A(t) = 0,8\text{V} + (1,524\text{V} - 0,8\text{V}) \left( 1 - \exp\left(-\frac{(t-t_0)}{\tau}\right) \right) \quad \text{für} \quad t \geq t_0 \quad . \quad (\text{C.36})$$

Wir überprüfen diesen Ansatz für  $t = t_0$  und  $t \rightarrow \infty$ :

$$u_A(t_0) = 0,8\text{V} = \text{OK} \quad \text{und} \quad u_A(t \rightarrow \infty) = 1,524\text{V} = \text{OK} \quad . \quad (\text{C.37})$$

Aus der Bedingung  $u_A(t_x) = 1,182\text{V}$  können wir über Gleichung (C.36) die Zeitkonstante  $\tau$  berechnen.

$$\tau = 100 \text{ ns} \quad (\text{C.38})$$

Die Zeitkonstante hängt neben dem Kapazitätswert  $C$  auch vom wirksamen Widerstandswert  $R$  ab.

$$\boxed{\tau = RC} \quad (C.39)$$

Um den Widerstandswerte zu berechnen, stellen wir uns vor, der Kondensator wäre aufgeladen und würde über die Schaltung entladen. Welchen Widerstandswert „sieht“ der Kondensator? Der wirksame Widerstand besteht aus dem Serienwiderstand  $R_{AS}$  und der Parallelschaltung aus  $R_{AP}$  und  $Z_L$ .

$$R = R_{AS} + R_{AP} \parallel Z_L = 40 \Omega \quad (C.40)$$

Hiermit erhalten wir

$$\boxed{C = \frac{\tau}{R} = 2,5 \text{ nF}} \quad (C.41)$$

-

[http://www.fh-dortmund.de/gustrau\\_hochfrequenztechnik](http://www.fh-dortmund.de/gustrau_hochfrequenztechnik)

(Stand: 14.08.2012)