

E Aufgabenlösungen zu Kapitel 5

E.1 Lösung der Übungsaufgabe 5.1

Eigenschaften des Zweitors

- Das Zweitor ist an keinem der Tore angepasst, da $s_{11} \neq 0$ und $s_{22} \neq 0$.
- Das Zweitor ist reziprok (übertragungssymmetrisch), da $s_{12} = s_{21}$.
- Das Zweitor ist symmetrisch, da $s_{12} = s_{21}$ und $s_{11} = s_{22}$.
- Das Zweitor ist verlustlos, da die Unitaritätsbedingung erfüllt ist. Es gilt $\mathbf{S}^T \mathbf{S}^* = \mathbf{E}$. (E.1)

Um die Unitaritätsbedingung zu prüfen, setzen wir die Streumatix \mathbf{S} in Gleichung (E.1) ein.

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S}^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & j\frac{12}{13} \\ j\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -j\frac{12}{13} \\ -j\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} \quad (\text{E.2})$$

Reflexionsdämpfung und Einfügedämpfung

Die Reflexionsdämpfungen (*Return loss*) berechnen wir für Tor 1 und Tor 2 zu

$$RL_1 = 20 \lg \left| \frac{1}{s_{11}} \right| = 8,3 \text{ dB} \quad \text{und} \quad RL_2 = 20 \lg \left| \frac{1}{s_{22}} \right| = 8,3 \text{ dB} \quad . \quad (\text{E.3})$$

Für die Einfügedämpfungen (*Insertion loss*) erhalten wir

$$IL_{12} = 20 \lg \left| \frac{1}{s_{12}} \right| = 0,695 \text{ dB} \quad \text{und} \quad IL_{21} = 20 \lg \left| \frac{1}{s_{21}} \right| = 0,695 \text{ dB} \quad . \quad (\text{E.4})$$

Umrechnung der Streumatix auf eine Torimpedanz von 100 Ω

Die Formeln für die Umnormierung der Streumatix vom Bezugswiderstand $Z_L = 50 \Omega$ auf einen neuen Bezugswiderstand $Z_{L,\text{neu}} = 100 \Omega$ finden wir in Abschnitt 5.5.3.

Nach Gleichung (5.58) lautet die unnormierte Streumatrix

$$\mathbf{S}_{\text{neu}} = \frac{1}{\det \mathbf{S}} \begin{pmatrix} (s_{11} - r)(1 - rs_{22}) + rs_{12}s_{21} & s_{12}(1 - r^2) \\ s_{21}(1 - r^2) & (s_{22} - r)(1 - rs_{11}) + rs_{12}s_{21} \end{pmatrix} \quad (\text{E.5})$$

mit der Determinante

$$\det \mathbf{S} = (1 - rs_{11})(1 - rs_{22}) - r^2 s_{12}s_{21} \quad (\text{E.6})$$

und dem Wert r

$$r = \frac{Z_{L,\text{neu}} - Z_L}{Z_{L,\text{neu}} + Z_L}. \quad (\text{E.7})$$

Bei Einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir zunächst

$$r = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \det \mathbf{S} = \frac{100}{117}. \quad (\text{E.8})$$

Für die Streumatrix mit einem Bezugswiderstand von $Z_{L,\text{neu}} = 100 \Omega$ ergibt sich

$$\mathbf{S}_{\text{neu}} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & j24 \\ j24 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,28 & j0,96 \\ j0,96 & -0,28 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.9})$$

Proberechnung mit ADS

Wir überprüfen unser Ergebnis durch eine Proberechnung mit Hilfe des HF-Schaltungssimulators ADS [Agil09]. Zunächst legen wir unsere Streumatrix in einem s2p-File ab (Siehe Buch S. 167).

s2p-Files beinhalten frequenzabhängige Streuparameter von Messungen oder Simulationen in einem les- und editierbaren Dateiformat. Sie können also auch dazu verwendet werden S-Parameter manuell einzugeben.

```
! s2p file for Problem 5.1
# GHz S MA R 50
! freq magS11 angS11 magS21 angS21 magS12 angS12 magS22 angS22
! freq 5/13 0deg 12/13 90deg 12/13 90deg 5/13 0deg
1.0 0.3846153846 0 0.923076923 90 0.923076923 90 0.3846153846 0
2.0 0.3846153846 0 0.923076923 90 0.923076923 90 0.3846153846 0
```

Bild E.1 s2p-File mit der Streumatrix

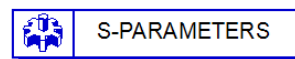
Das in Bild E.1 gezeigte s2p-File enthält mit Ausrufezeichen markierte Kommentarzeilen, die vom Programm ignoriert werden. Die Zeile mit dem Doppelkreuz zeigt, dass die Frequenz in Gigahertz (GHz) und die Streuparameter (S) nach Betrag und Phase (MA = *Magnitude*) angegeben werden. Der Bezugswiderstand (R) hat den Wert 50Ω (50).

Die Streuparameter der Aufgabenstellung sind frequenzunabhängig vorgegeben. Es wurde daher exemplarisch für die Darstellung für Frequenzen von 1 und 2 GHz die Streuparameter nach Betrag und Phase als Dezimalwerte eingegeben. Die Kommentarzeilen dienen der Erläuterung der Werte.

Dieses s2p-File kann nun in einer Simulation verwendet werden. Bild E.2 zeigt die Beschaltung eines entsprechenden Zweitores mit 50 Ω bzw. 100 Ω Toren (Term=Termination).

S-Parameter Simulation

Linear Frequency Sweep



S_Param
SP1
Start=1.0 GHz
Stop=2 GHz
Step=100 MHz

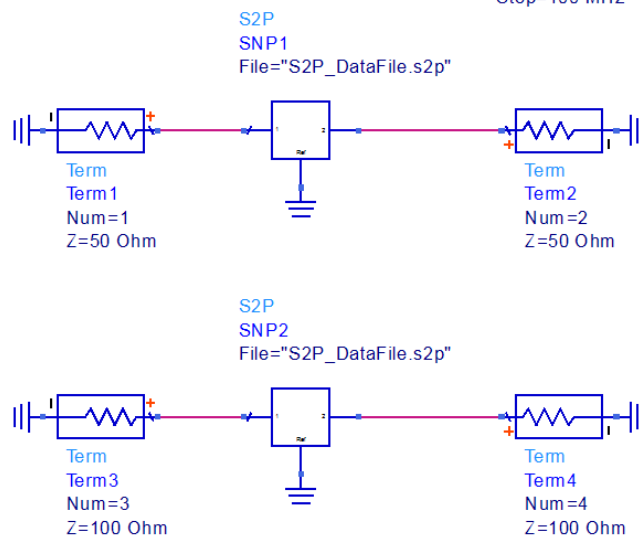


Bild E.2 Schaltung zur Umnormierung der Streuparameter

Bild E.3 zeigt uns die Ergebnisse der Simulation. In der oberen Bildhälfte finden wir die Streuparameter für einen Bezugswiderstand von 50 Ω . Es ergeben sich die Streuparameter der Aufgabenstellung mit Beträgen von $5/13 \approx 0,385$ und $12/13 \approx 0,923$. Die Phasenlagen entsprechen Null Grad (positive reelle Werte) bei den Reflexionsfaktoren und 90 Grad (positive imaginäre Werte) bei den Transmissionsfaktoren.

In der unteren Bildhälfte finden wir die Streuparameter für einen Bezugswiderstand von 100 Ω . Es ergeben sich die Streuparameter mit Beträgen von 0,28 und 0,96. Die Phasenlagen entsprechen 180 Grad (negative reelle Werte) bei den Reflexionsfaktoren und 90 Grad (positive imaginäre Werte) bei den Transmissionsfaktoren. Die Ergebnisse stimmen mit den Ergebnissen der manuellen Rechnung (Gleichung (E.9)) überein.

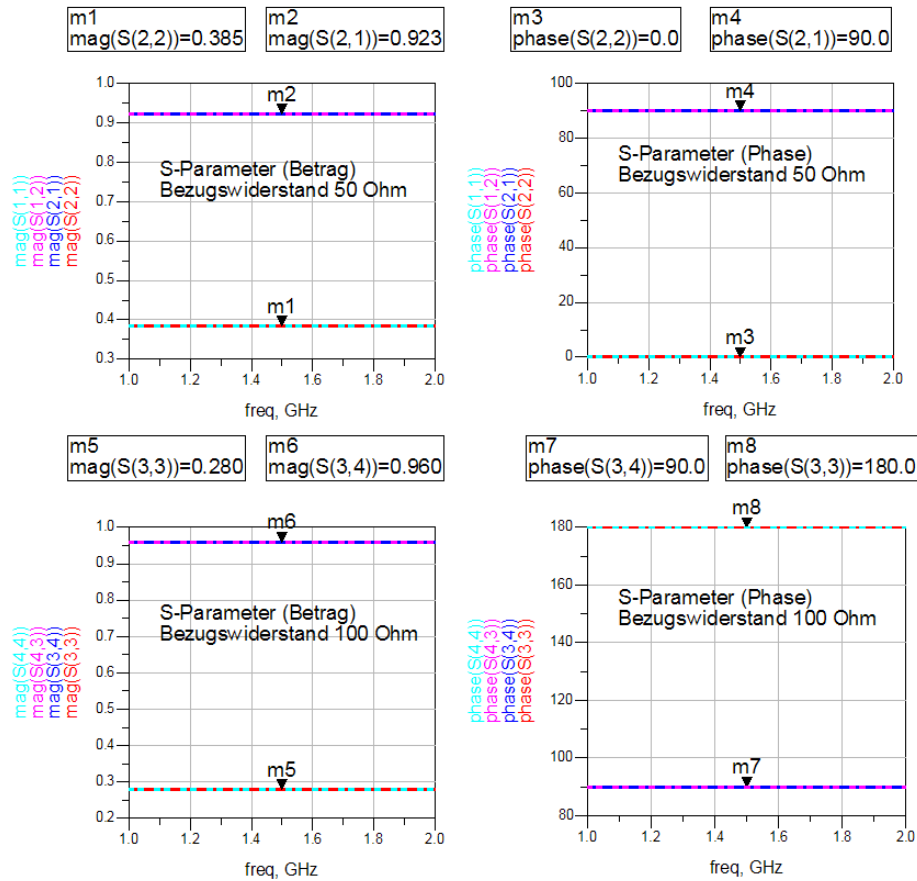


Bild E.3 Streuparameter für $Z_L = 50 \Omega$ (oben) und $Z_{L,neu} = 100 \Omega$ (unten)

E.2 Lösung der Übungsaufgabe 5.2

Berechnung der Antenneneingangsimpedanz

Der Reflexionsfaktor r_A an der Antenne ist bestimmt durch die Antennenimpedanz Z_A sowie den Bezugswiderstand $Z_L = 50 \Omega$.

$$r_A = \frac{Z_A - Z_L}{Z_A + Z_L} \quad (\text{E.10})$$

Wenn wir die Gleichung nach Z_A umstellen, so können wir die Antennenimpedanz berechnen.

$$Z_A = Z_L \frac{1+r_A}{1-r_A} \quad (\text{E.11})$$

Im weiteren benötigen wir die komplexe Rechnung und setzen den Reflexionsfaktor mit Real- und Imaginärteil ein.

$$r_A = 0,4e^{-j20^\circ} = 0,4(\cos(20^\circ) - j\sin(20^\circ)) = \text{Re}\{r_A\} + j\text{Im}\{r_A\} = 0,367 - j0,137 \quad (\text{E.12})$$

Wir setzen dies in Gl. (E.11) ein und erhalten durch konjugiert-komplexe Erweiterung des Nenners nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} Z_A &= Z_L \frac{1+r_A}{1-r_A} = Z_L \frac{1+\text{Re}\{r_A\} + j\text{Im}\{r_A\}}{1-\text{Re}\{r_A\} - j\text{Im}\{r_A\}} \\ &= Z_L \frac{(1+\text{Re}\{r_A\} + j\text{Im}\{r_A\})(1-\text{Re}\{r_A\} + j\text{Im}\{r_A\})}{(1-\text{Re}\{r_A\})^2 + (\text{Im}\{r_A\})^2} \\ &= Z_L \frac{1 - (\text{Re}\{r_A\})^2 - (\text{Im}\{r_A\})^2 + j2\text{Im}\{r_A\}}{(1-\text{Re}\{r_A\})^2 + (\text{Im}\{r_A\})^2} = (102,9 - j33,51)\Omega . \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Berechnung des Reflexionsfaktors (Bezugswiderstandes $Z_{L,\text{neu}} = 75 \Omega$)

Wir berechnen nun den Reflexionsfaktor beim Wechsel des Bezugswiderstandes auf $Z_{L,\text{neu}} = 75 \Omega$.

$$r_{A,\text{neu}} = \frac{Z_A - Z_{L,\text{neu}}}{Z_A + Z_{L,\text{neu}}} \quad (\text{E.14})$$

Wie zuvor benötigen wir die komplexe Rechnung und erweitern den Nenner konjugiert-komplex.

$$\begin{aligned} r_{A,\text{neu}} &= \frac{Z_A - Z_{L,\text{neu}}}{Z_A + Z_{L,\text{neu}}} = \frac{\text{Re}\{Z_A\} + j\text{Im}\{Z_A\} - Z_{L,\text{neu}}}{\text{Re}\{Z_A\} + j\text{Im}\{Z_A\} + Z_{L,\text{neu}}} \\ &= \frac{(\text{Re}\{Z_A\} - Z_{L,\text{neu}} + j\text{Im}\{Z_A\})(\text{Re}\{Z_A\} + Z_{L,\text{neu}} - j\text{Im}\{Z_A\})}{(\text{Re}\{Z_A\} + Z_{L,\text{neu}})^2 + (\text{Im}\{Z_A\})^2} \\ &= 0,1857 - j0,1534 \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Ausgedrückt durch Betrag und Phase erhalten wir:

$$\begin{aligned} |r_{A,\text{neu}}| &= \sqrt{(\text{Re}\{Z_A\})^2 + (\text{Im}\{Z_A\})^2} = 0,241 \\ \angle r_{A,\text{neu}} &= \arctan\left(\frac{\text{Im}\{Z_A\}}{\text{Re}\{Z_A\}}\right) = -39,56^\circ . \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Berechnung der reflektierten und aufgenommenen Leistung

Die reflektierte Leistung beträgt

$$P_{\text{wb}} = |s_{11}|^2 P_{\text{wa}} = 0,0581 \text{ W} . \quad (\text{E.17})$$

Die absorbierte Leistung ist

$$P_{\text{abs}} = (1 - |s_{11}|^2) P_{\text{wa}} = 0,9419 \text{ W} . \quad (\text{E.18})$$

Proberechnung mit ADS

Um die Ergebnisse für die Eingangsimpedanz und den Reflexionsfaktor zu überprüfen, führen wir eine Simulation mit dem HF-Schaltungssimulator ADS [Agil09] durch. Den Reflexionsfaktor bei einer Torimpedanz von 50Ω legen wir in einer s1p-Datei ab (Bild E.4).

```
! s1p File for Problem 5.2
!
#   GHZ   S   MA   R   50

! freq1  magS11  angS11
! freq2  magS11  angS11

1.0     0.4     -20
2.0     0.4     -20
```

Bild E.4 s1p-File mit dem Reflexionsfaktor der Antenne

Die Schaltungen sind in Bild E.5 dargestellt.

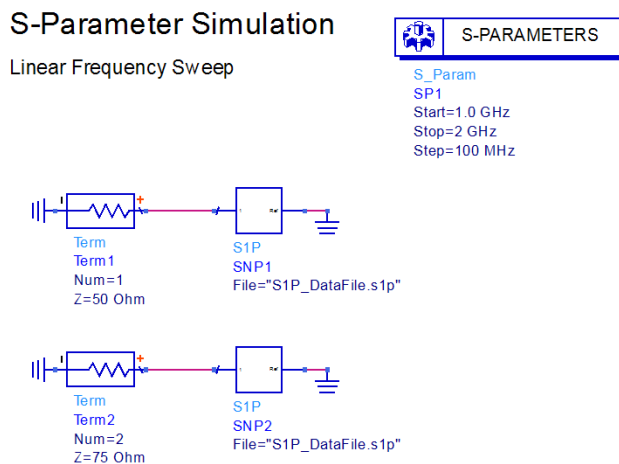


Bild E.5 Schaltung zur Berechnung der Eingangsimpedanz und des Reflexionsfaktors bei verändertem Torwiderstand

Die Ergebnisse sehen wir in Bild E.6. Die Ergebnisse stimmen mit den rechnerisch ermittelten Werten überein.

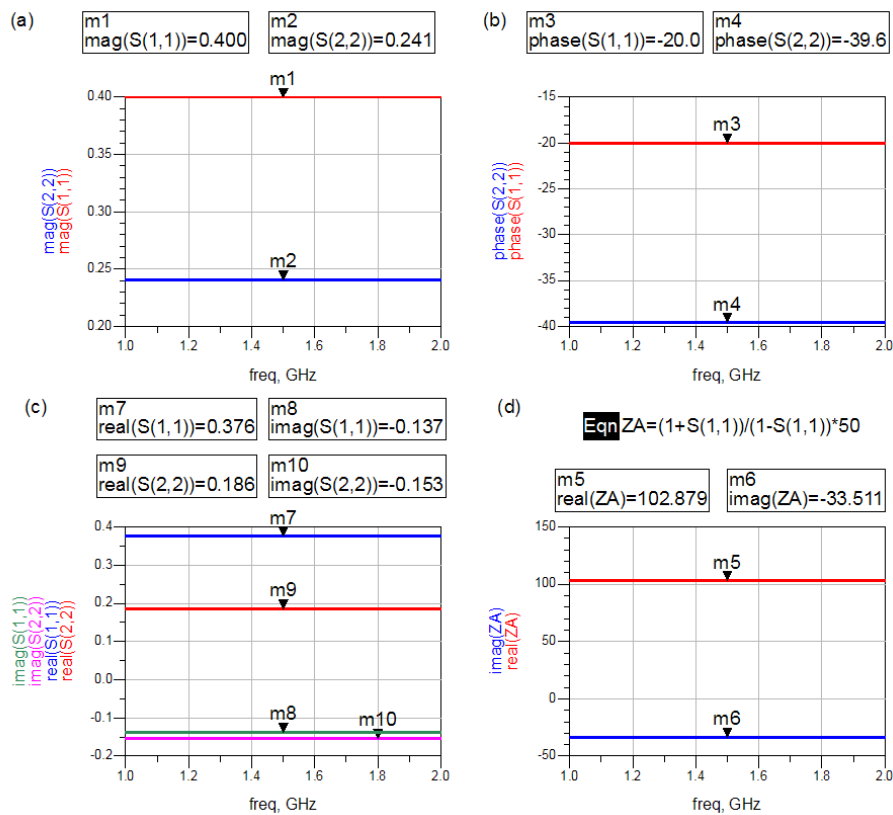


Bild E.6 (a) Beträge und (b) Phasenwinkel der Reflexionsfaktoren bei Torwiderständen von $50\ \Omega$ (rot) und $75\ \Omega$ (blau). (c) Darstellung der Reflexionsfaktoren nach Real- und Imaginärteil. (d) Real- und Imaginärteil der Eingangsimpedanz.

E.3 Lösung der Übungsaufgabe 5.3

Streumatrix des Zweitores mit einer Serienimpedanz

Bild E.7 zeigt die Schaltung zur Berechnung der Streuparameter des Zweitores. Die Vorgehensweise orientiert sich an Beispiel 5.3 (Buch S. 156). Zunächst einmal benötigen wir die Eingangsimpedanz Z_{E1} .

$$Z_{E1} = Z + Z_L \quad (\text{E.19})$$

Der Reflexionsfaktor s_{11} ergibt sich dann zu

$$s_{11} = \frac{Z_{E1} - Z_L}{Z_{E1} + Z_L} = \frac{Z_L}{2Z_L + Z} = s_{22}. \quad (\text{E.20})$$

Aufgrund der Symmetrie ist $s_{22} = s_{11}$.

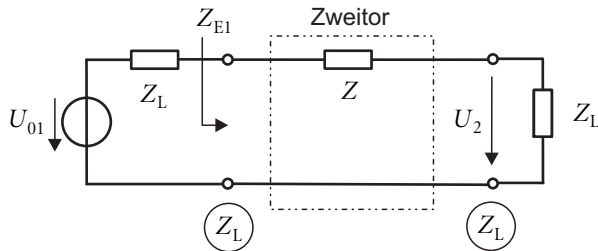


Bild E.7 Zweitor mit einer Serienimpedanz Z

Der Transmissionsfaktor s_{21} berechnet sich mit

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} \sqrt{\frac{Z_L}{Z_L}} = 2 \frac{Z_L}{Z_L + Z + Z_L} = \frac{2Z_L}{2Z_L + Z} = s_{12} \quad (\text{E.21})$$

Das Verhältnis der Spannungen errechnen wir dabei einfach über die Spannungsteilerregel. Aufgrund der Reziprozität ist $s_{12} = s_{21}$.

Wir erhalten also als Streumatrix des Zweitors:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2Z_L + Z} \begin{pmatrix} Z & 2Z_L \\ 2Z_L & Z \end{pmatrix} \quad (\text{E.22})$$

Überprüfung des Ergebnisses für zwei Spezialfälle

Probeweise wollen wir die Formel für einen Kurzschluss $Z = 0$ untersuchen. Die Streumatrix wird dann:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.23})$$

Es tritt also keine Reflexion und volle Transmission auf. Bei Betrachtung von Bild E.7 stellen wir fest, dass dies genauso zu erwarten ist.

Weiterhin wollen wir die Formel für einen Leerlauf $Z \rightarrow \infty$ untersuchen. Die Streumatrix wird dann:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.24})$$

Es tritt also ein Reflexionsfaktor von Eins auf (Verhalten eines Leerlaufes an den Toren) und die Transmission verschwindet. Bei Betrachtung von Bild E.7 stellen wir fest, dass auch dies richtig ist.

Streumatrix des Zweitors mit einer T-Schaltung aus drei Impedanzen

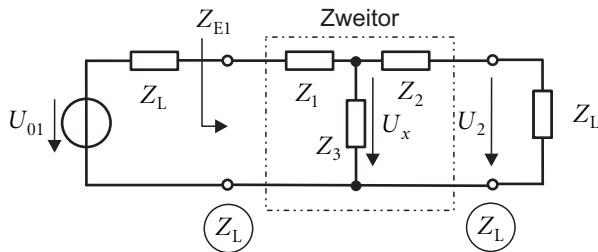


Bild E.8 Zweitor mit einer T-Schaltung aus drei Impedanzen

Bild E.8 zeigt die Schaltung zur Berechnung der Streuparameter des Zweitors. Zunächst einmal benötigen wir die Eingangsimpedanz Z_{E1} .

$$Z_{E1} = Z_1 + Z_3 \parallel (Z_2 + Z_L) = Z_1 + \frac{Z_3(Z_2 + Z_L)}{Z_3 + Z_2 + Z_L} \quad (\text{E.25})$$

Der Reflexionsfaktor s_{11} ergibt sich dann nach kurzer Rechnung zu

$$s_{11} = \frac{Z_{E1} - Z_L}{Z_{E1} + Z_L} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_L - Z_2 Z_L - Z_L^2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_L + Z_2 Z_L + 2Z_3 Z_L + Z_L^2}. \quad (\text{E.26})$$

Den Reflexionsfaktor s_{22} erhalten wir, wenn wir in der obigen Gleichung die Indizes 1 und 2 vertauschen. Bei genauer Betrachtung ergeben sich nur zwei Vorzeichenänderungen:

$$s_{22} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 - Z_1 Z_L + Z_2 Z_L - Z_L^2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_L + Z_2 Z_L + 2Z_3 Z_L + Z_L^2}. \quad (\text{E.27})$$

Bei der Berechnung des Transmissionsfaktors benötigen wir das Spannungsverhältnis U_2/U_{01} . Wir führen die Hilfsspannung U_x ein, um vorteilhaft mit der Spannungsteilerregel rechnen zu können.

$$\frac{U_2}{U_x} = \frac{Z_L}{Z_2 + Z_L} \quad \text{und} \quad \frac{U_x}{U_{01}} = \frac{Z_3 \parallel (Z_2 + Z_L)}{Z_L + Z_1 + Z_3 \parallel (Z_2 + Z_L)} \quad (\text{E.28})$$

Nach kurzer Umformung erhalten wir dann für den Transmissionsfaktor

$$\begin{aligned} s_{21} &= \frac{2U_2}{U_{01}} \sqrt{\frac{Z_L}{Z_L}} = 2 \frac{U_2}{U_x} \cdot \frac{U_x}{U_{01}} = 2 \frac{Z_L}{Z_2 + Z_L} \cdot \frac{Z_3 \parallel (Z_2 + Z_L)}{Z_L + Z_1 + Z_3 \parallel (Z_2 + Z_L)} \\ &= \frac{2Z_3 Z_L}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_L + Z_2 Z_L + 2Z_3 Z_L + Z_L^2} = s_{12}. \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

Aufgrund der Reziprozität ist $s_{12} = s_{21}$.

Überprüfung des Ergebnisses für den Fall $Z_3 = 0$

Probeweise wollen wir die Streuparameter für einen Kurzschluss $Z_3 = 0$ untersuchen. Man sieht zunächst in Gleichung (E.29), dass der Transmissionsfaktor erwartungsgemäß gegen Null geht.

Aus Gleichung (E.26) wird

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{Z_{E1} - Z_L}{Z_{E1} + Z_L} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_L - Z_2 Z_L - Z_L^2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_L + Z_2 Z_L + Z_L^2} = \frac{Z_2(Z_1 - Z_L) + Z_L(Z_1 - Z_L)}{Z_2(Z_1 + Z_L) + Z_L(Z_1 + Z_L)} \\ &= \frac{(Z_2 + Z_L)(Z_1 - Z_L)}{(Z_2 + Z_L)(Z_1 + Z_L)} = \frac{(Z_1 - Z_L)}{(Z_1 + Z_L)}. \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

Dies entspricht den Erwartungen, da die Eingangsimpedanz für diesen Spezialfall $Z_{E1} = Z_1$ ergibt. Die Rechnung für s_{22} läuft entsprechend.

Streumatrix des Zweitors mit einer π -Schaltung aus drei Impedanzen

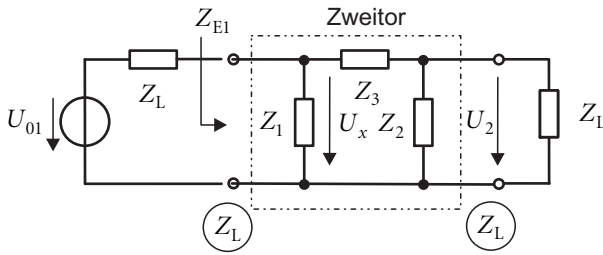


Bild E.9 Zweitors mit einer π -Schaltung aus drei Impedanzen

Bild E.9 zeigt die Schaltung zur Berechnung der Streuparameter des Zweitors. Zunächst benötigen wir wieder die Eingangsimpedanz Z_{E1} .

$$Z_{E1} = Z_1 \parallel (Z_3 + Z_2 \parallel Z_L) \quad (\text{E.31})$$

Der Reflexionsfaktor s_{11} ergibt sich dann nach kurzer Rechnung zu

$$s_{11} = \frac{Z_{E1} - Z_L}{Z_{E1} + Z_L} = \frac{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 Z_L - Z_2 Z_3 Z_L - Z_1 Z_L^2 - Z_2 Z_L^2 - Z_3 Z_L^2}{Z_1 Z_2 Z_3 + 2Z_1 Z_2 Z_L + Z_1 Z_3 Z_L + Z_2 Z_3 Z_L + Z_1 Z_L^2 + Z_2 Z_L^2 + Z_3 Z_L^2}. \quad (\text{E.32})$$

Den Reflexionsfaktor s_{22} erhalten wir, wenn wir in der obigen Gleichung die Indizes 1 und 2 vertauschen. Bei genauer Betrachtung ergeben sich nur zwei Vorzeichenänderungen:

$$s_{22} = \frac{Z_1 Z_2 Z_3 - Z_1 Z_3 Z_L + Z_2 Z_3 Z_L - Z_1 Z_L^2 - Z_2 Z_L^2 - Z_3 Z_L^2}{Z_1 Z_2 Z_3 + 2Z_1 Z_2 Z_L + Z_1 Z_3 Z_L + Z_2 Z_3 Z_L + Z_1 Z_L^2 + Z_2 Z_L^2 + Z_3 Z_L^2}. \quad (\text{E.33})$$

Bei der Berechnung des Transmissionsfaktors benötigen wir das Spannungsverhältnis U_2/U_{01} . Wir führen die Hilfsspannung U_x ein, um vorteilhaft mit der Spannungsteilerregel rechnen zu können.

$$\frac{U_2}{U_x} = \frac{Z_2 \parallel Z_L}{Z_3 + Z_2 \parallel Z_L} \quad \text{und} \quad \frac{U_x}{U_{01}} = \frac{Z_1 \parallel (Z_3 + Z_2 \parallel Z_L)}{Z_L + Z_1 \parallel (Z_3 + Z_2 \parallel Z_L)} \quad (\text{E.34})$$

Nach kurzer Umformung erhalten wir dann für den Transmissionsfaktor

$$\begin{aligned} s_{21} &= \frac{2U_2}{U_{01}} \sqrt{\frac{Z_L}{Z_L}} = 2 \frac{U_2}{U_x} \cdot \frac{U_x}{U_{01}} = 2 \frac{Z_2 \parallel Z_L}{Z_3 + Z_2 \parallel Z_L} \cdot \frac{Z_1 \parallel (Z_3 + Z_2 \parallel Z_L)}{Z_L + Z_1 \parallel (Z_3 + Z_2 \parallel Z_L)} \\ &= \frac{2Z_1 Z_2 Z_L}{Z_1 Z_2 Z_3 + 2Z_1 Z_2 Z_L + Z_1 Z_3 Z_L + Z_2 Z_3 Z_L + Z_1 Z_L^2 + Z_2 Z_L^2 + Z_3 Z_L^2} = s_{12} \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

Aufgrund der Reziprozität ist $s_{12} = s_{21}$.

Überprüfung des Ergebnisses für den Fall $Z_1 = 0$

Probeweise wollen wir die Streuparameter für einen Kurzschluss $Z_1 = 0$ untersuchen. Aus Gleichung (E.32) wird

$$s_{11} = \frac{-Z_2 Z_3 Z_L - Z_2 Z_L^2 - Z_3 Z_L^2}{Z_2 Z_3 Z_L + Z_2 Z_L^2 + Z_3 Z_L^2} = -1 \quad (\text{E.36})$$

Dies entspricht dem an den Klemmen auftretenden Kurzschluss ($r = -1$).

Sehen wir uns den ausgangsseitigen Reflexionsfaktor s_{22} in Gleichung (E.33) an.

$$s_{22} = \frac{Z_2 Z_3 - Z_2 Z_L - Z_3 Z_L}{Z_2 Z_3 + Z_2 Z_L + Z_3 Z_L} = \frac{Z_2 Z_3 - (Z_2 + Z_3) Z_L}{Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3) Z_L} = \frac{\frac{Z_2 Z_3}{(Z_2 + Z_3)} - Z_L}{\frac{Z_2 Z_3}{(Z_2 + Z_3)} + Z_L} = \frac{Z_2 \parallel Z_3 - Z_L}{Z_2 \parallel Z_3 + Z_L} \quad (\text{E.37})$$

Das Ergebnis entspricht der an den Ausgangsklemmen sichtbaren Parallelschaltung von Z_2 und Z_3 .

In Gleichung (E.35) werden die Transmissionsfaktoren erwartungsgemäß Null.

E.4 Lösung der Übungsaufgabe 5.4

Das Signalflussdiagramm für die Schaltung ist in Bild E.10 wiedergegeben.

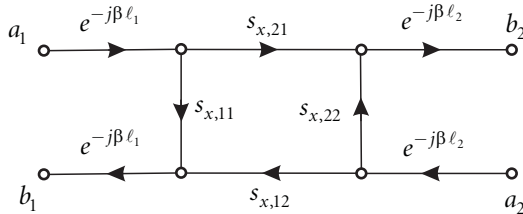


Bild E.10 Signalflussdiagramm

Mit Hilfe des Signalflussdiagramms können wir die Streuparameter des resultierenden Zweitors berechnen.

$$s_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = s_{x,11} e^{-j\beta(\ell_1+\ell_1)} = s_{x,11} e^{-j2\beta\ell_1} \quad (\text{E.38})$$

$$s_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} = s_{x,22} e^{-j\beta(\ell_2+\ell_2)} = s_{x,22} e^{-j2\beta\ell_2} \quad (\text{E.39})$$

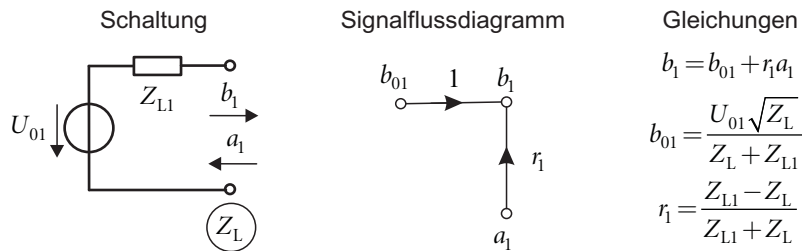
$$s_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = s_{x,21} e^{-j\beta(\ell_1+\ell_2)} \quad (\text{E.40})$$

$$s_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} = s_{x,12} e^{-j\beta(\ell_2+\ell_1)} \quad (\text{E.41})$$

Die Leitungen beeinflussen offenbar nur den Phasenwinkel der Streuparameter. Bei bekannten Längen können diese Einflüsse sehr einfach herausgerechnet und so die Streuparameter des eingebetteten Zweitors bestimmt werden.

E.5 Lösung der Übungsaufgabe 5.5

Im folgenden sollen die Gleichungen für die Ersatzwellenquelle in Bild 5.14 (Buch S. 162) hergeleitet werden. Das Bild sei im Folgenden noch einmal gezeigt.

**Bild E.11** Signalflussdiagramm der Quelle**Berechnung des Reflexionsfaktors r_1**

Der Reflexionsfaktor kann unmittelbar angegeben werden, wenn man die Impedanz in die Klemmen der Schaltung (Bild links) betrachtet. Die ideale Spannungsquelle U_{01} stellt einen Kurzschluss dar, so dass nur Z_{L1} bleibt. Den Reflexionsfaktor bezogen auf den Torwiderstand Z_L berechnen wir dann wie üblich mit

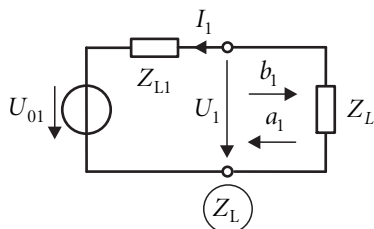
$$r_1 = \frac{Z_{L1} - Z_L}{Z_{L1} + Z_L}. \quad (\text{E.42})$$

Berechnung der Urwellenquelle

Da die Schaltung eine Spannungsquelle enthält, handeln es sich um eine aktive Schaltung, d.h. es gibt eine ablaufende Welle b_1 auch dann, wenn keine Welle a_1 zuläuft. Dies drückt sich in der Gleichung

$$b_1 = b_{01} + r_1 a_1 \quad (\text{E.43})$$

durch den Term b_{01} aus. Um diesen Term auszurechnen, nutzen wir den Zusammenhang zwischen den Wellengrößen a und b und Strom I und Spannung U an den Klemmen aus. Wir betrachten dazu die nachfolgende Schaltung.

**Bild E.12** Strom und Spannung an den Klemmen zur Berechnung der Wellengrößen

Die ablaufende Welle b und die hinlaufende Welle a können wir berechnen mit

$$b_1 = \frac{U_1 - Z_L I_1}{\sqrt{Z_L}} \quad \text{und} \quad a_1 = \frac{U_1 + Z_L I_1}{\sqrt{Z_L}}. \quad (\text{E.44})$$

Die Spannung kann über die Spannungsteilerregel berechnet werden

$$U_1 = \frac{Z_L}{Z_L + Z_{L1}} U_{01} . \quad (\text{E.45})$$

Der Strom ergibt sich aus dem ohmschen Gesetz

$$I_1 = -\frac{U_{01}}{Z_L + Z_{L1}} . \quad (\text{E.46})$$

Daraus berechnen wir

$$a_1 = \frac{U_1 + Z_L I_1}{2\sqrt{Z_L}} = \frac{Z_L U_{01} + (-Z_L U_{01})}{2\sqrt{Z_L} (Z_L + Z_{L1})} = 0 \quad (\text{E.47})$$

und

$$b_1 = \frac{U_1 - Z_L I_1}{2\sqrt{Z_L}} = \frac{Z_L U_{01} - (-Z_L U_{01})}{2\sqrt{Z_L} (Z_L + Z_{L1})} = \frac{\sqrt{Z_L} U_{01}}{Z_L + Z_{L1}} = b_{01} . \quad (\text{E.48})$$

Dies ist die gesuchte Urwellenquelle b_{01} im Signalflussdiagramm.

E.6 Lösung der Übungsaufgabe 5.6

Von einer Rückkopplung spricht man, wenn das Ausgangssignal auf das Eingangssignal zurückwirkt. Zur Herleitung der Rückkopplungsregel betrachten wir Bild E.13. Die Schaltung besteht aus einem Netzwerk mit einer Vorwärtsverstärkung V_V und einem Netzwerk mit der Rückwärtsverstärkung V_R . Das Ausgangssignal Y wird über das Netzwerk V_R zurückgekoppelt und zum Eingangssignal X addiert.

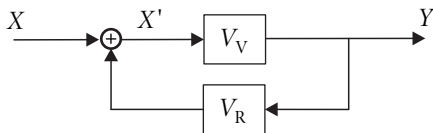


Bild E.13 Zur Herleitung der Rückkopplungsregel

Aus dem Bild lesen wir die folgenden zwei Gleichungen ab.

$$X' = X + V_R Y \quad \text{und} \quad Y = V_V X' \quad (\text{E.49})$$

Hieraus berechnen wir:

$$Y = \frac{V_V}{1 - V_R V_V} X . \quad (\text{E.50})$$

Angewandt auf das Signalflussdiagramm in Bild 5.11 (Buch S. 161) erhalten wir:

$$b = \frac{s_x}{1 - s_x s_y} a . \quad (\text{E.51})$$

E.7 Lösung der Übungsaufgabe 5.7

Bei der Schaltung in Bild E.14 sollen die Reflexionsfaktoren und Impedanzen berechnet werden. Die Zahlenwerte sollen aus Beispiel 5.6 (Buch S. 162) übernommen werden. Daher gilt

$$\text{Bezugswiderstand } Z_L = 50 \Omega \quad (\text{E.52})$$

$$f = 1 \text{ GHz} \quad (\text{E.53})$$

$$Z_A = 100 \Omega + j\omega L = 100 \Omega + j100 \Omega \quad , \text{ da } L = 15,92 \text{ nH} \quad (\text{E.54})$$

$$Z = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{mit } C = 5 \text{ pF} . \quad (\text{E.55})$$

Die Impedanz Z_{E1} berechnen wir mittels komplexer Rechnung zu:

$$Z_{E1} = Z_L \parallel \frac{1}{j\omega C} = \frac{Z_L(1 - j\omega CZ_L)}{1 + (\omega CZ_L)^2} = (14,42 - j22,65) \Omega . \quad (\text{E.56})$$

Der Reflexionsfaktor r_1 lässt sich ebenfalls schnell ermitteln

$$r_1 = \frac{Z_{E1} - Z_L}{Z_{E1} + Z_L} = \frac{\text{Re}\{Z_{E1}\}^2 + \text{Im}\{Z_{E1}\}^2 - Z_L^2 + j2\text{Im}\{Z_{E1}\}Z_L}{(\text{Re}\{Z_{E1}\} + Z_L)^2 + \text{Im}\{Z_{E1}\}^2} = 0,6176 \cdot e^{-j128,15^\circ} . \quad (\text{E.57})$$

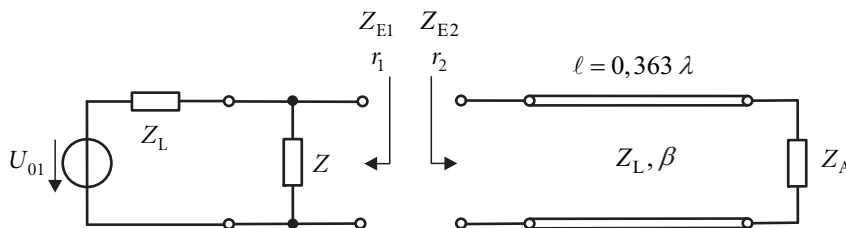


Bild E.14 Schaltung zur Berechnung von Reflexionsfaktoren und Impedanzen

Der Reflexionsfaktor r_2 berechnen wir aus dem Reflexionsfaktor r_2' am Ende der Leitung. Am Ende der Leitung gilt:

$$r_2' = \frac{Z_A - Z_L}{Z_A + Z_L} = \frac{\text{Re}\{Z_A\}^2 + \text{Im}\{Z_A\}^2 - Z_L^2 + j2\text{Im}\{Z_A\}Z_L}{(\text{Re}\{Z_A\} + Z_L)^2 + \text{Im}\{Z_A\}^2} = 0,62 \cdot e^{j29,75^\circ} . \quad (\text{E.58})$$

Am Anfang der Leitung ist der Reflexionsfaktor

$$r_2 = r_2' e^{-j2\beta l} = 0,62 \cdot e^{j29,75^\circ} e^{j98,64^\circ} = 0,62 \cdot e^{j128,4^\circ} = r_1^* . \quad (\text{E.59})$$

Wenn wir das Ergebnis mit dem Reflexionsfaktor r_1 in Gleichung (E.57) vergleichen, so stellen wir fest, dass die Reflexionsfaktoren konjugiert komplex zueinander sind $r_2 = r_1^*$.

Die Impedanz Z_{E2} berechnen wir am einfachsten über das Smith-Chart-Diagramm in Bild E.15. Hier wurde der kommerzielle Schaltungssimulator ADS [Agil] verwendet. Natürlich können auch andere Tools aus dem Internet verwendet werden (z.B. [Dell10]). Als elektri-

sche Leitungslänge verwenden wir $0,363\lambda = 130,68^\circ$. Die Abschlussimpedanz ist durch eine schwarze Raute und die Eingangsimpedanz durch ein rotes Quadrat gekennzeichnet.

Wir lesen aus dem Diagramm den folgenden Wert ab:

$$Z_{E2} = (14,28 + j22,56)\Omega = Z_{E1}^* \quad (\text{E.60})$$

Die Impedanzen Z_{E1} und Z_{E2} sind – genauso wie die Reflexionsfaktoren r_1 und r_2 – also konjugiert komplex zueinander. Es liegt Leistungsanpassung vor.

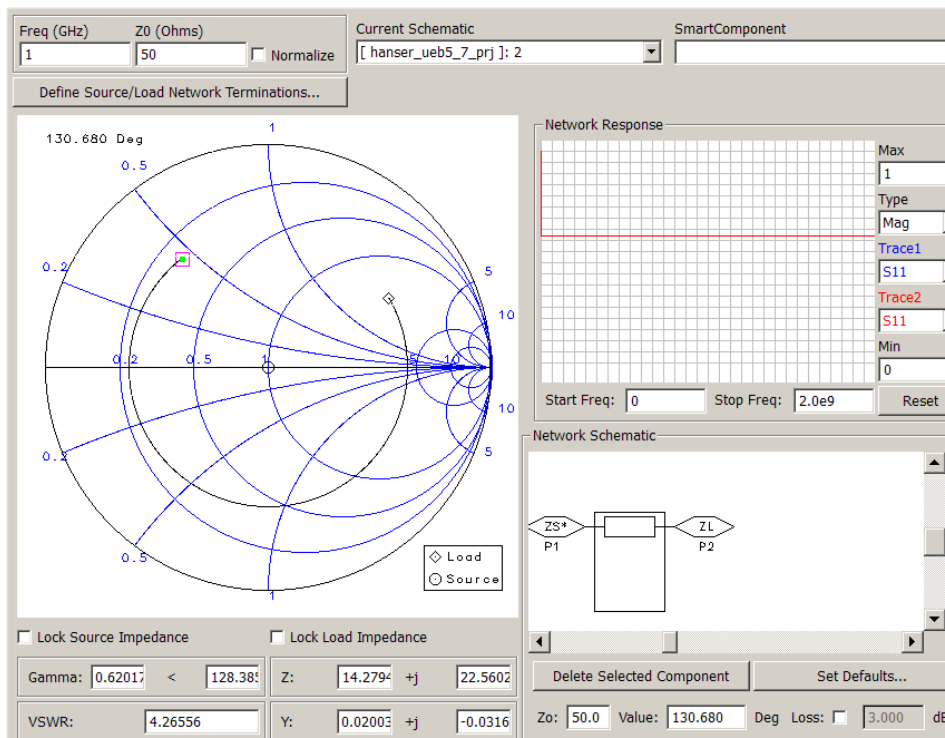
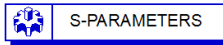


Bild E.15 Berechnung der Eingangsimpedanz Z_{E2} mit dem Smith-Chart

Überprüfung mit einem HF Schaltungssimulator

Abschließend wollen wir die Ergebnisse noch mit einem HF Schaltungssimulator validieren. Bild E.16 zeigt die Schaltung. Obgleich wir die obigen Ergebnisse nur für eine Frequenz von 1 GHz bestimmt haben, nutzen wir hier die Möglichkeit Streuparameter-Ergebnisse durch einen Frequenz-Sweep in einem Bereich von 100 MHz bis 2 GHz zu betrachten.

S-Parameter Simulation



Linear Frequency Sweep

S_Param
SP1
Start=0.1 GHz
Stop=2 GHz
Step=1 MHz

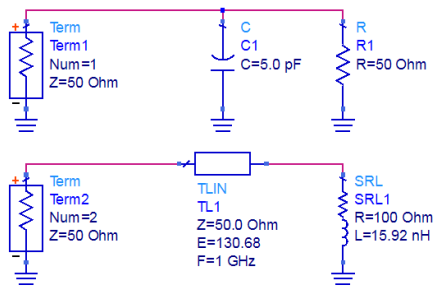


Bild E.16 Schaltung zur Berechnung der Reflexionsfaktoren und Eingangsimpedanzen

Die Ergebnisse des HF-Schaltungssimulators sind in Bild E.17 dargestellt.

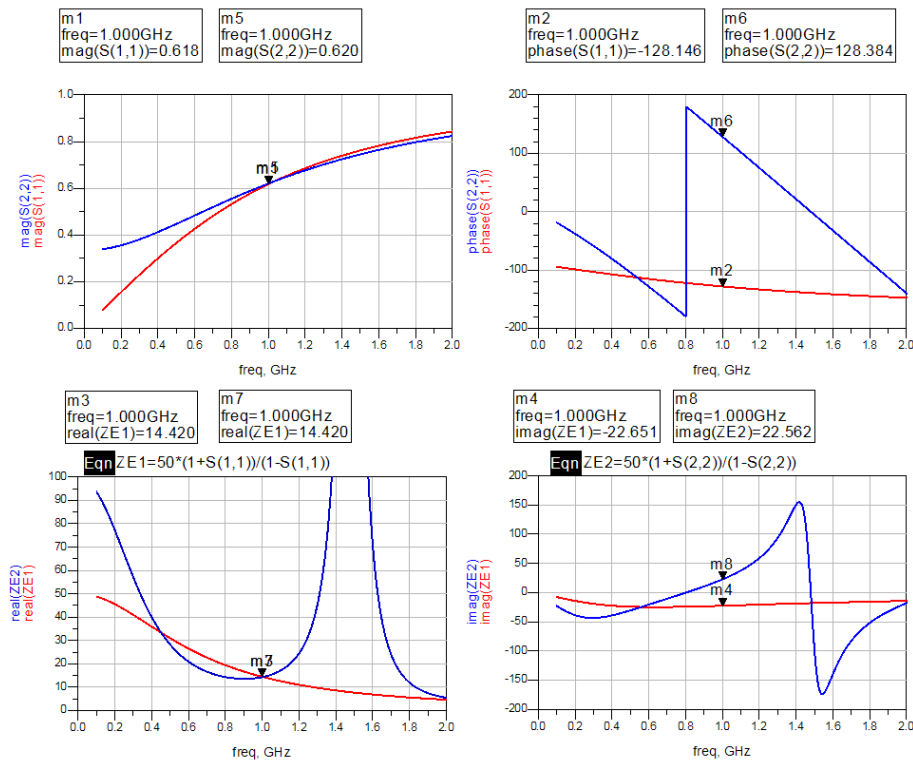


Bild E.17 Ergebnisse des HF-Schaltungssimulators

Die oberen beiden Diagramme enthalten Beträge (links) und Phasen (rechts) der Reflexionsfaktoren und die unteren beiden Diagramme Real- (links) und Imaginärteile (rechts) der

Impedanzen. Entscheidend sind die Werte bei einer Frequenz von 1 GHz. Bei der Frequenz wurden Marker positioniert, so dass die Zahlenwerte ausgewertet werden können. Wie zuvor sehen wir konjugiert-komplexe Impedanzen und Reflexionsfaktoren. Die Zahlenwerte stimmen mit den obigen manuellen Rechnungen überein.

E.8 Lösung der Übungsaufgabe 5.8

Wir fordern von einem Dreitor, dass es folgende Eigenschaften besitzen soll

- allseitige Anpassung ($s_{ii} = 0$),
- Reziprozität ($s_{ij} = s_{ji}$) und
- Verlustlosigkeit (Unitaritätsbedingung: $\mathbf{S}^T \mathbf{S}^* = \mathbf{E}$).

Mit den obigen Beziehungen ergeben sich aus der Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & 0 & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & s_{12}^* & s_{13}^* \\ s_{12}^* & 0 & s_{23}^* \\ s_{13}^* & s_{23}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.61})$$

die folgenden Zusammenhänge:

$$|s_{12}|^2 + |s_{13}|^2 = 1 \quad (\text{E.62})$$

$$s_{13} s_{23}^* = 0 \quad (\text{E.63})$$

$$s_{12} s_{23}^* = 0 \quad (\text{E.64})$$

$$s_{23} s_{13}^* = 0 \quad (\text{E.65})$$

$$|s_{12}|^2 + |s_{23}|^2 = 1 \quad (\text{E.66})$$

$$s_{12} s_{13}^* = 0 \quad (\text{E.67})$$

$$s_{23} s_{12}^* = 0 \quad (\text{E.68})$$

$$s_{13} s_{12}^* = 0 \quad (\text{E.69})$$

$$|s_{13}|^2 + |s_{23}|^2 = 1. \quad (\text{E.70})$$

Betrachten wir die Gleichungen (E.63) und (E.64) und nehmen an, dass gilt $s_{23} \neq 0$. In diesem Falle müssen s_{12} und s_{13} übereinstimmen.

$$s_{12} = s_{13} \quad (\text{E.71})$$

Aus Gleichung (E.67) folgt dann

$$s_{12} = s_{13} = 0. \quad (\text{E.72})$$

Dies stellt aber einen Widerspruch zu Gleichung (E.62) dar, denn

$$|s_{12}|^2 + |s_{13}|^2 = 0 \neq 1 \quad (\text{Widerspruch falls } s_{23} \neq 0) \quad (\text{E.73})$$

Betrachten wir nun den Fall, dass gilt $s_{23} = 0$. Dann muss nach Gleichung (E.66) gelten:

$$|s_{12}| = 1. \quad (\text{E.74})$$

Nach Gleichung (E.70) wäre zudem

$$|s_{13}| = 1 \quad (\text{E.75})$$

Die führt aber zu einem Widerspruch in Gleichung (E.62).

$$|s_{12}|^2 + |s_{13}|^2 = 2 \neq 1 \quad (\text{E.76})$$

Somit können bei einem Dreitor die Eigenschaften allseitige Anpassung, Reziprozität und Verlustlosigkeit nicht gleichzeitig realisiert werden.

–

http://www.fh-dortmund.de/gustrau_hochfrequenztechnik

(Stand: 25.02.2011)