Grundlagen der Elektrotechnik

Eine Einführung in die Gleich- und Wechselstromtechnik

Lösungen der Übungsaufgaben aus Kapitel 2

Reinhard Scholz

8. August 2018

Die Lösung der Übungsaufgaben erfolgt zunächst analytisch in allgemeiner Form. Anschließend wird die numerische Lösung angegeben, die mit einem Taschenrechner oder mit Octave nachvollzogen werden kann. In den beiliegenden Octave-Skripten ist es aus syntaktischen Gründen nicht möglich, alle im Text benutzten Variablennamen zu verwenden. Die Anpassung wurde jedoch so vorgenommen, dass eine Zuordnung leicht möglich ist.

Teilweise weicht die Vorgehensweise bei der Berechnung mit Octave deutlich von der analytischen Methode ab. Dies ist beispielsweise bei der Lösung von quadratischen Gleichungen der Fall. Hier wird nicht die quadratische Ergänzung verwendet, sondern die Koeffizienten des zugehörigen Polynoms werden als Vektor dargestellt, der einem Algorithmus zur Nullstellensuche übergeben wird.

Die in diesem Dokument eingebundenen Diagramme wurden einer Nachbearbeitung unterzogen, so dass deren Erscheinungsbild von der Bildschirmausgabe abweicht.

Übung 2.1 Effektiv- und Mittelwert einer harmonischen Spannung

Der Augenblickswert einer periodischen Spannung mit der Frequenz $f = 50\,\mathrm{Hz}$ wird durch die Funktion $u(t) = 5\,\mathrm{V} \cdot \sin(2\pi f t)$ beschrieben.

a) Stellen Sie die Spannung $u(t)$ für $0 \leq t \leq 40\,\mathrm{ms}$ in einem Diagramm dar und ermitteln Sie die Periodendauer T.

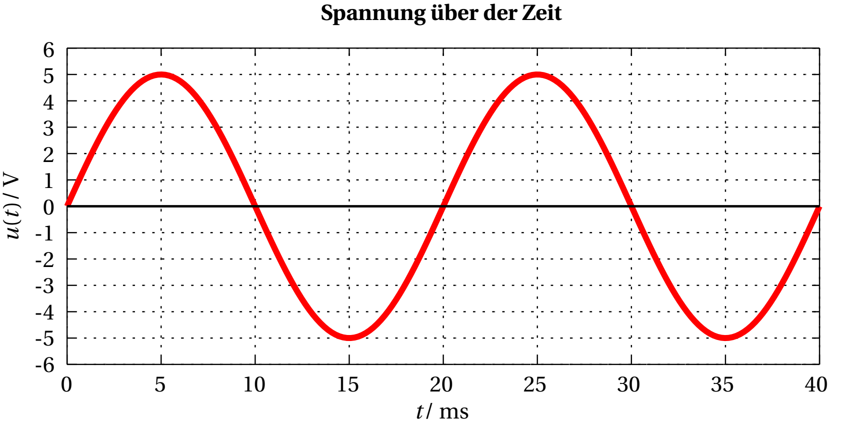
b) Geben Sie die Amplitude (Spitzenwert) $\hat{u}$ der Spannung an.

c) Wie groß ist die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Augenblickswert (Spitze-Spitze-Wert) u_{ss}?

d) Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{u}$, den Gleichrichtwert $\overline{|u|}$ und den Effektivwert u_{eff} der Spannung durch Auswertung der entsprechenden Integrale.

Lösung der Übungsaufgabe 2.1 (Seite 66)

a) Diagramm der Spannung $u(t) = 5\,\mathrm{V} \cdot \sin(2\pi f\,t)$ mit $f = 50\,\mathrm{Hz}$



Periodendauer: $T = 1/f = 20\,\mathrm{ms}$

b) Amplitude (Spitzenwert) $\hat{u}$

$\hat{u} = 5\,\mathrm{V}$

c) Spitze-Spitze-Wert u_{ss}

$u_{ss} = 10\,\mathrm{V}$

d) Mittelwert $\bar{u}$, Gleichrichtwert $\overline{|u|}$ und Effektivwert u_{eff}

Periodendauer $T = 1/f = 20\,\mathrm{ms}$, $\quad f \cdot T = 1$

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T 5\,\mathrm{V}\cdot\sin(2\pi f\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{5\,\mathrm{V}}{T}\,\frac{-1}{2\pi f}\cos(2\pi f\,t)\Big|_0^T$$

$$\bar{u} = 0$$

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} 5\,\mathrm{V}\cdot\sin(2\pi f\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{10\,\mathrm{V}}{T}\,\frac{-1}{2\pi f}\cos(2\pi f\,t)\Big|_0^{T/2}$$

$$= \frac{-5\,\mathrm{V}}{\pi}\Big(\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - \underbrace{\cos(0)}_{=1}\Big) = \frac{10\,\mathrm{V}}{\pi}$$

$$\overline{|u|} = 3{,}1831\,\mathrm{V}$$

$$u_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \big(u(t)\big)^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T 25\,\mathrm{V}^2\cdot\sin^2(2\pi f\,t)\,\mathrm{d}t}$$

$$= \sqrt{\frac{25\,\mathrm{V}^2}{T}\int_0^T\left(\frac{1-\cos(4\pi f\,t)}{2}\right)\mathrm{d}t} = \frac{5\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}}\sqrt{\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t}_{=1} - \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \cos(4\pi f\,t)\,\mathrm{d}t}_{=0}}$$

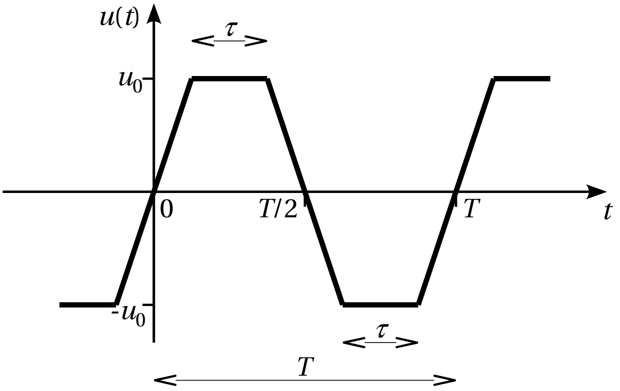
$$u_{\mathrm{eff}} = 3{,}5355\,\mathrm{V}$$

Octave-Datei: `loesung_02_01.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 2.1

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
U = 5;   % V
f = 50; % Hz
tmin = 0;
tmax = 40e-3; % s
disp(["Vorgaben"]);
disp(["U = ",num2str(U)," V (Spitzenwert)"]);
disp(["f = ",num2str(f)," Hz"]);
disp(["tmin = ",num2str(tmin*10^3)," ms"]);
disp(["tmax = ",num2str(tmax*10^3)," ms"]);
disp(" ");

% Festlegung der Stützstellen
N = 200;
n = 0:(N-1);

% Zeitachse erstellen
t = n*(tmax-tmin)/(N-1)+tmin;

% Berechnung des Zeitverlaufs der Spannung (Augenblickswerte)
u = U*sin(2*pi*f*t);

% Darstellung des Spannungsverlaufs
hFig1 = figure("Name","Spannung über der Zeit");
hPlot1 = plot(t*10^3,u,"r"); % t in ms, u in V
grid on;
title("\\bf Harmonische Wechselspannung","FontSize",14);
xlabel("t / ms","FontSize",12);
ylabel("u(t) / V","FontSize",12);
```

Übung 2.2 Effektiv- und Mittelwerte

Im Bild ist eine periodische trapezförmige Spannung dargestellt. Die Periodendauer T ist konstant, τ lässt sich im Bereich $0 \leq \tau \leq T/2$ variieren. (Dadurch ist ein stufenloser Übergang von einer Dreieck- in eine Rechteckspannung möglich.)



a) Beschreiben Sie die Spannung durch eine stückweise lineare Funktion.

b) Bestimmen Sie den Mittelwert $\bar{u}$ und den Gleichrichtwert $\overline{|u|}$ in Abhängigkeit von τ durch Flächenbetrachtung.

c) Berechnen Sie den Effektivwert u_{eff} der Spannung $u(t)$ in Abhängigkeit von τ durch Auswertung des Integrals.

d) Geben Sie den Effektivwert einer Dreieckspannung und einer Rechteckspannung an.

Lösung der Übungsaufgabe 2.2 (Seite 66)

a) Beschreibung durch stückweise lineare Funktion

$$u(t) = u_0 \cdot \begin{cases} \dfrac{4t}{T-2\tau} & \text{für } \dfrac{\tau}{2} - \dfrac{T}{4} < t \le \dfrac{T}{4} - \dfrac{\tau}{2} \\ 1 & \text{für } \dfrac{T}{4} - \dfrac{\tau}{2} < t \le \dfrac{T}{4} + \dfrac{\tau}{2} \\ \dfrac{2T-4t}{T-2\tau} & \text{für } \dfrac{T}{4} + \dfrac{\tau}{2} < t \le \dfrac{3T}{4} - \dfrac{\tau}{2} \\ \text{periodisch} & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Mittelwert $\bar{u}$ und Gleichrichtwert $\overline{|u|}$

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\cdot\frac{T+\tau}{2}u_0 = u_0\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{T}\right)$$

Anmerkungen:

- Die Flächen oberhalb und unterhalb der Zeitachse sind gleich groß. Deshalb ist der Mittelwert null.
- Zur Berechnung des Gleichrichtwerts wird die Fläche des Trapez mit der Höhe u_0 und den Breiten τ sowie T betrachtet. Dieses Trapez tritt in einer Periode von $u(t)$ zwei Mal auf.

c) Effektivwert u_{eff}

Aufgrund der Symmetrie des Signals wird nur ein Viertel der Periode betrachtet. Damit muss lediglich über einen linearen und einen konstanten Abschnitt der Spannung integriert werden.

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{4}{T}\int_0^{T/4} u^2(t)\,\mathrm{d}t} \qquad \text{(Symmetrie)}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{T}\int_0^{T/4-\tau/2}\left(\frac{4t}{T-2\tau}u_0\right)^2\mathrm{d}t + \frac{4}{T}\int_{T/4-\tau/2}^{T/4} u_0\,\mathrm{d}t}$$

$$= \sqrt{\frac{4^3\cdot u_0^2}{T\cdot\left(T-2\tau\right)^2}\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{T/4-\tau/2} + \frac{4\cdot u_0^2}{T}\cdot\left.t\right|_{T/4-\tau/2}^{T/4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4^3\cdot u_0^2}{T\cdot\left(T-2\tau\right)^2}\cdot\frac{\left(T-2\tau\right)^3}{3\cdot 4^3} + \frac{4\cdot u_0^2}{T}\cdot\left(\frac{T}{4}-\frac{T}{4}+\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$u_{\text{eff}} = u_0\cdot\sqrt{\frac{T-2\tau}{3T}+\frac{2\tau}{T}}$$

d) Effektivwert von Dreieck- und Rechteckspannung

allgemein ($0 \leq \tau \leq T/2$): $$u_{\text{eff}} = u_0 \cdot \sqrt{\frac{T - 2\tau}{3\,T} + \frac{2\tau}{T}}$$

Dreieckspannung ($\tau = 0$): $$u_{\text{eff}} = \frac{u_0}{\sqrt{3}}$$

Rechteckspannung ($\tau = T/2$): $$u_{\text{eff}} = u_0$$

Übung 2.3 Kenngrößen harmonischer Signale

Der Effektivwert eines sinusförmigen Wechselstromes mit der Frequenz $f = 2\,\mathrm{kHz}$ beträgt $i_{\mathrm{eff}} = 10\,\mathrm{mA}$. Der Strom $i(t)$ ist mittelwertfrei, die Phasenlage ist nicht festgelegt.

a) Bestimmen Sie die Periodendauer T.

b) Wie groß ist der Spitzenwert $\hat{i}$ des Stromes.

c) Geben Sie den zeitlichen Verlauf des Stromes $i(t)$ an und stellen Sie diesen in einem aussagekräftigen Diagramm dar.

d) Berechnen Sie den Gleichrichtwert $\overline{|i|}$.

Lösung der Übungsaufgabe 2.3 (Seite 66)

a) Periodendauer

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2\ \text{kHz}} = 500\ \mu\text{s}$$

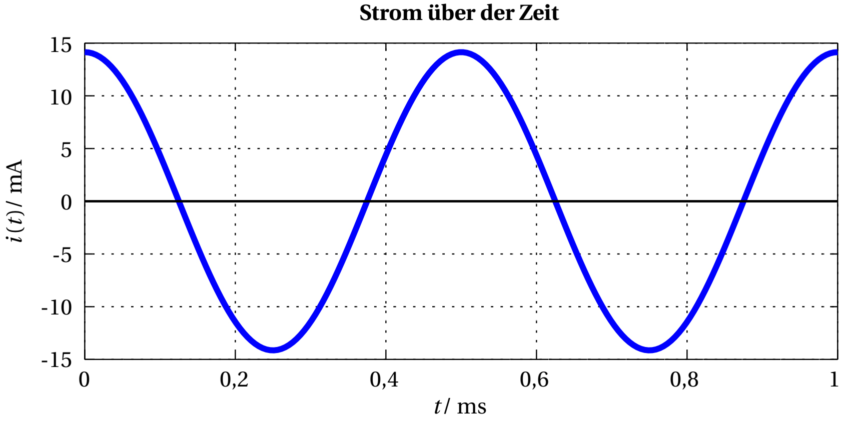
b) Spitzenwert des Stromes

$$\hat{i} = \sqrt{2} \cdot i_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 10\ \text{mA} = 14{,}142\ \text{mA}$$

c) Zeitlicher Verlauf des Stromes

$$i(t) = \hat{i}\cos(2\pi f t + \varphi) = \hat{i}\cos(2\pi t/T + \varphi) \quad \text{mit } \hat{i} = 14{,}142\ \text{mA und } f = 2\ \text{kHz}$$

Die Phasenlage φ des Stromes ist nicht festgelegt. Zur Darstellung im Diagramm wird $\varphi = 0$ gewählt.



d) Gleichrichtwert

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \left|\hat{i}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right|\mathrm{d}t = \frac{4\,\hat{i}}{T}\int_0^{T/4}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4\,\hat{i}}{T}\,\frac{T}{2\pi}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\Bigg|_0^{T/4} = \frac{2\,\hat{i}}{\pi} = 9{,}003\ \text{mA}$$

Octave-Datei: `loesung_02_03.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 2.3

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
I = 1e-2;   % A
f = 2e3;    % Hz
tmin = 0;
tmax = 2/f; % zwei Perioden
disp("Vorgaben");
disp(["I = ",num2str(I*1e3)," mA (Effektivwert)"]);
disp(["f = ",num2str(f*1e-3)," kHz"]);
disp(["tmin = ",num2str(tmin*1e3)," ms"]);
disp(["tmax = ",num2str(tmax*1e3)," ms"]);
disp(" ");

% Festlegung der Stützstellen
N = 200;
n = 0:(N-1);

% Zeitachse erstellen
t = n*(tmax-tmin)/(N-1)+tmin;

% Berechnung des Zeitverlaufs des Stromes (Augenblickswerte)
i = sqrt(2)*I*cos(2*pi*f*t);

% Periodendauer
T = 1/f;
disp("Periodendauer");
disp(["T = ",num2str(T*1e3)," ms"]);
disp(" ");

% Spitzenwert
Is = sqrt(2)*I;
disp("Spitzenwert");
disp(["Is = ",num2str(Is*1e3)," mA"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_02_03.m` (Fortsetzung)

```
% Gleichrichtwert (numerische Integration)
% Zur numerischen Integration muss eine Periode des Signals
% aus dem Datensatz ausgewählt werden. Dies erfolgt durch
% die Funktion find(t<T) und wird folgendermaßen realisiert:
%   Iaav = trapz(t(find(t<T)),abs(i(find(t<T))))/T;
% Die Integration kann auch über eine beliebige ganzahlige
% Anzahl von Perioden durchgeführt werden. Wenn, wie hier,
% tmax-tmin = n*T ist, kann die Berechnung auch mittels
Iaav = trapz(t,abs(i))/(tmax-tmin);
% erfolgen. Die Genauigkeit der Berechnung hängt auch von
% der Anzahl der Stützstellen ab.
disp("Gleichrichtwert");
disp(["Iaav = ",num2str(Iaav*1e3)," mA"]);
disp(" ");

% Darstellung des Stromes über der Zeit
hFig1 = figure("Name","Strom über der Zeit");
hPlot1 = plot(t*1e3,i*1e3,"b"); % t in ms, i in mA
grid on;
title("\\bf Harmonischer Wechselstrom","FontSize",14);
xlabel("t / ms","FontSize",12);
ylabel("i(t) / mA","FontSize",12);
```

Übung 2.4 Effektiv- und Mittelwertberechnung

Eine periodische Spannung mit der Periodendauer $T = 1$ ms wird beschrieben durch

$$u(t) = U_0\left[\operatorname{sgn}\left(\sin(2\pi t/T)\right) - \sin(2\pi t/T)\right],$$

wobei

$$\operatorname{sgn}(\xi) = \begin{cases} +1 & \text{für } \xi > 0 \\ 0 & \text{für } \xi = 0 \\ -1 & \text{für } \xi < 0 \end{cases}$$

die Vorzeichenfunktion und $U_0 = 10$ V ist.

a) Stellen Sie die Spannung $u(t)$ für $0 \le t \le 2T$ in einem Diagramm dar.

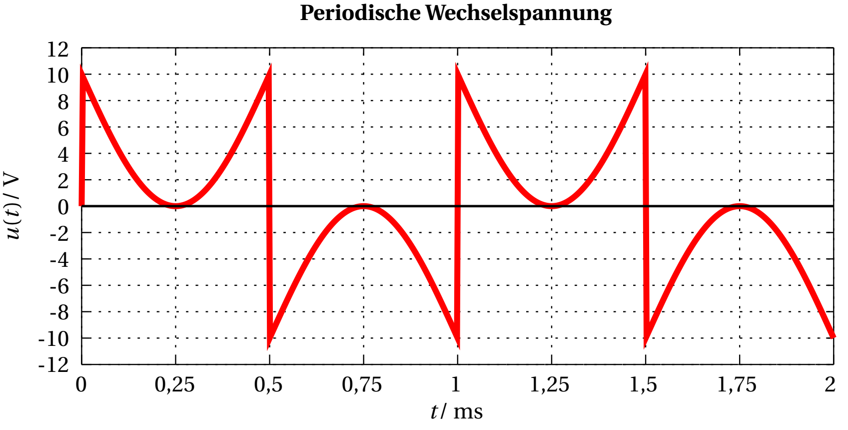
b) Geben Sie den Mittelwert $\bar{u}$ der Spannung an (Flächenbetrachtung).

c) Berechnen Sie den Effektivwert u_{eff} und den Gleichrichtwert $\overline{|u|}$ der Spannung durch Auswertung der entsprechenden Integrale.

d) Ermitteln Sie den Effektivwert u_{eff} und den Gleichrichtwert $\overline{|u|}$ der Spannung durch numerische Integration mit Octave.

Lösung der Übungsaufgabe 2.4 (Seite 67)

a) Diagramm der Spannung $u(t)$ mit $T = 1$ ms



b) Mittelwert $\bar{u}$

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Die Flächen oberhalb und unterhalb der Zeitachse sind gleich groß.

c) Effektivwert u_{eff} und Gleichrichtwert $\overline{|u|}$

Aufgrund der Symmetrie von $u(t)$ wird hier nur ein Viertel der Periode betrachtet.

$$
\begin{aligned}
u_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} u^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{4}{T}\int_0^{T/4} u^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{4\,U_0^2}{T}\int_0^{T/4}\left(1-\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)^2\,\mathrm{d}t}\\
&= \sqrt{\frac{4\,U_0^2}{T}\int_0^{T/4}\left(1-2\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)+\sin^2\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)\mathrm{d}t}\\
&= \sqrt{\frac{4\,U_0^2}{T}\int_0^{T/4}\left(1-2\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(4\pi\frac{t}{T}\right)\right)\mathrm{d}t}\\
&= \sqrt{\frac{4\,U_0^2}{T}\int_0^{T/4}\left(\frac{3}{2}-2\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(4\pi\frac{t}{T}\right)\right)\mathrm{d}t}\\
&= \sqrt{\frac{4\,U_0^2}{T}\left(\frac{3}{2}\int_0^{T/4}\mathrm{d}t-2\int_0^{T/4}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{T/4}\cos\left(4\pi\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t\right)}\\
&= \sqrt{\frac{4\,U_0^2}{T}\,\frac{3}{2}\,t\Big|_0^{T/4}+2\,\frac{4\,U_0^2}{T}\,\frac{T}{2\pi}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\Big|_0^{T/4}-\frac{4\,U_0^2}{T}\,\frac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\frac{t}{T}\right)\Big|_0^{T/4}}\\
u_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{3\,U_0^2}{2}-\frac{4\,U_0^2}{\pi}} = \sqrt{\frac{3\pi-8}{2\pi}}\,U_0 = 4{,}762\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{|u|} &= \frac{1}{T}\int_0^{T}|u(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/4}|u(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{4\,U_0}{T}\int_0^{T/4}\left(1-\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{4\,U_0}{T}\int_0^{T/4}\mathrm{d}t-\frac{4\,U_0}{T}\int_0^{T/4}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t = U_0+\frac{4\,U_0}{T}\,\frac{T}{2\pi}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\Big|_0^{T/4}\\
\overline{|u|} &= U_0-\frac{2\,U_0}{\pi} = \frac{\pi-2}{\pi}\,U_0 = 3{,}634\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

d) Ergebnisse der numerischen Berechnungen mit Octave

$$
\begin{aligned}
\bar{u} &= -0{,}008\ \mathrm{V}\\
u_{\text{eff}} &= 4{,}753\ \mathrm{V}\\
\overline{|u|} &= 3{,}626\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Die programmtechnische Umsetzung ist im Octave-Skript ersichtlich. Die angegebenen Zahlenwerte beziehen sich auf $N = 600$ Stützstellen im Intervall $0 \le t \le 2$ ms.

Octave-Datei: `loesung_02_04.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 2.4

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
U0 = 10;    % V
T =  1e-3;  % s
tmin = 0;
tmax = 2*T; % zwei Perioden
disp("Vorgaben");
disp(["  U0 = ",num2str(U0)," V"]);
disp(["   T = ",num2str(T*1e3)," ms"]);
disp(["tmin = ",num2str(tmin*1e3)," ms"]);
disp(["tmax = ",num2str(tmax*1e3)," ms"]);
disp(" ");

% Festlegung der Stützstellen
N = 600;
n = 0:(N-1);

% Zeitachse erstellen
t = n*(tmax-tmin)/(N-1)+tmin;

% Berechnung des Zeitverlaufs der Spannung (Augenblickswerte)
u = U0*(sign(sin(2*pi*t/T))-sin(2*pi*t/T));

% Mittelwert, Effektivwert und Gleichrichtwert (analytische Lösung)
Uav = 0;
Ueff = U0*sqrt((3*pi-8)/(2*pi));
Uaav = U0*(pi-2)/pi;
disp("Analytische Lösung");
disp(["Mittelwert:      Uav = ",num2str(Uav)," V"]);
disp(["Effektivwert:    Ueff = ",num2str(Ueff)," V"]);
disp(["Gleichrichtwert: Uaav = ",num2str(Uaav)," V"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_02_04.m` (Fortsetzung)

```
% Mittelwert, Effektivwert und Gleichrichtwert (numerische Integration)
Uav = trapz(t,u)/(tmax-tmin); % Mittelwert
Ueff = sqrt(trapz(t,u.^2)/(tmax-tmin)); % Effektivwert
Uaav = trapz(t,abs(u))/(tmax-tmin); % Gleichrichtwert
disp("Numerische Integration");
disp(["Mittelwert:       Uav = ",num2str(Uav)," V"]);
disp(["Effektivwert:    Ueff = ",num2str(Ueff)," V"]);
disp(["Gleichrichtwert: Uaav = ",num2str(Uaav)," V"]);
disp(" ");

% Darstellung des Spannungsverlaufs
hFig1 = figure("Name","Spannung über der Zeit");
hPlot1 = plot(t*1e3,u,"r"); % t in ms, u in V
grid on;
title("\\bf Periodische Wechselspannung","FontSize",14);
xlabel("t / ms","FontSize",12);
ylabel("u(t) / V","FontSize",12);
```

Übung 2.5 Komplexe Amplitude und Zeigerdiagramm

Eine periodische Spannung ist durch die Funktion $u(t) = \hat{u}\cos(2\pi f t + \varphi)$ mit der Spitzenspannung $\hat{u} = 5\,\mathrm{V}$, der Frequenz $f = 1\,\mathrm{kHz}$ und der Phase $\varphi = -135°$ gegeben.

a) Bestimmen Sie den Effektivwert der Spannung $u(t)$.

b) Stellen Sie zwei Perioden der Spannung $u(t)$ in einem Diagramm dar.

c) Ermitteln Sie die komplexen Amplituden $\underline{\hat{U}}$ und $\underline{U}$.

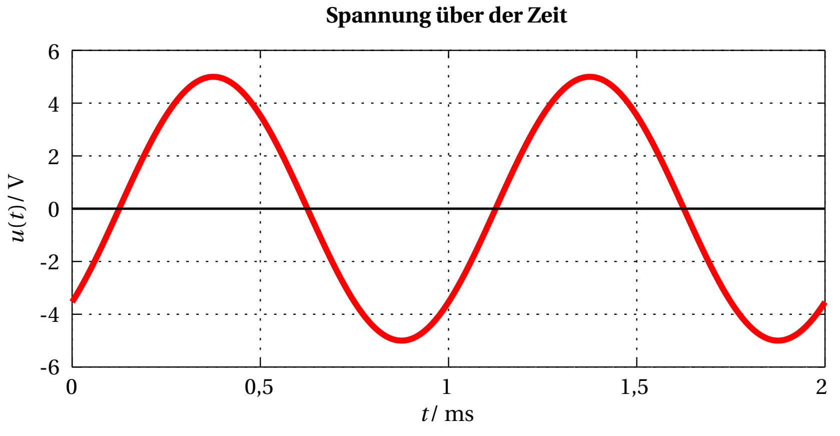
d) Stellen Sie die komplexe Amplitude $\underline{\hat{U}}$ in einem Zeigerdiagramm dar.

Lösung der Übungsaufgabe 2.5 (Seite 67)

a) Effektivwert

$$u_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 3{,}536\,\text{V}$$

b) Spannungsverlauf $u(t)$

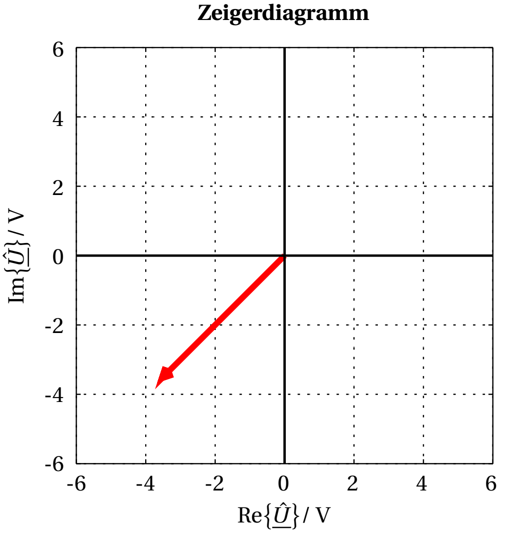


c) Komplexe Amplituden

$$\underline{\hat{U}} = \hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = 5\,\text{V}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}135°} = -(3{,}536 + \mathrm{j}\,3{,}536)\,\text{V}$$

$$\underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = 3{,}536\,\text{V}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}135°} = -(2{,}5 + \mathrm{j}\,2{,}5)\,\text{V}$$

d) Zeigerdiagramm von $\underline{\hat{U}}$



Octave-Datei: `loesung_02_05.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 2.5

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
u_s = 5;             % V   (Spitzenwert)
f = 1e3;             % Hz
phi = -135*pi/180;   % Grad -> Radiant
tmin = 0;            % Skalierung der Zeitachse
tmax = 2/f;          % zwei Perioden
Umax = 6;            % Skalierung des Zeigerdiagramms (in Volt)
disp("Vorgaben");
disp([" u_s = ",num2str(u_s)," V"]);
disp([" phi = ",num2str(180*phi/pi),"°"]);
disp(["   f = ",num2str(f*1e-3)," kHz"]);
disp(["tmin = ",num2str(tmin*1e3)," ms"]);
disp(["tmax = ",num2str(tmax*1e3)," ms"]);
disp(" ");

% Festlegung der Stützstellen
N = 200;
n = 0:(N-1);

% Zeitachse erstellen
t = n*(tmax-tmin)/(N-1)+tmin;

% Berechnung des Zeitverlaufs der Spannung (Augenblickswerte)
u = u_s*cos(2*pi*f*t+phi);

% Effektivwert der Spannung
u_eff = u_s/sqrt(2);
disp("Effektivwert der Spannung");
disp(["u_eff = ",num2str(u_eff)," V"]);
disp(" ");

% Komplexe Amplitude
Us = u_s*exp(j*phi); % Spitzenwert
Ueff = Us/sqrt(2);   % Effektivwert
disp("Komplexe Amplitude");
disp(["Spitzenwert:    Us = (",num2str(Us),") V"]);
disp(["Effektivwert: Ueff = (",num2str(Ueff),") V"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_02_05.m` (Fortsetzung)

```
% Darstellung des Spannungsverlaufs
hFig1 = figure("Name","Spannung über der Zeit");
hPlot1 = plot(t*1e3,u,"r"); % t in ms, u in V
grid on;
title("\\bf Spannung über der Zeit","FontSize",14);
xlabel("t / ms","FontSize",12);
ylabel("u(t) / V","FontSize",12);

% ==========================================================
% Funktion zur grafischen Darstellung eines Zeigers
function pX = makepointer(x,s)
x = x(:);
d = x*s./abs(x);
pX = [zeros(length(x),1),x,x-d*(1+j/2),x,x-d*(1-j/2)].';
endfunction
% ==========================================================

% Erzeugung des Zeigers (Linie und Pfeilspitze)
pUs = makepointer(Us,Umax/20);

% Darstellung des Zeigerdiagramms
hFig2 = figure("Name","Zeigerdiagramm");
hPlot2 = plot(pUs,"r");
axis([-Umax,Umax,-Umax,Umax]);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm","FontSize",14);
xlabel("Re\\{Us\\} / V","FontSize",12);
ylabel("Im\\{Us\\} / V","FontSize",12);
```

Übung 2.6 Komplexe Amplitude und Zeitsignal

Ein Strom mit der Frequenz $f = 500$ Hz ist durch $\underline{I} = 20\ \text{mA} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4}$ beschrieben.

a) Stellen Sie die komplexe Amplitude $\underline{I}$ in einem Zeigerdiagramm dar.

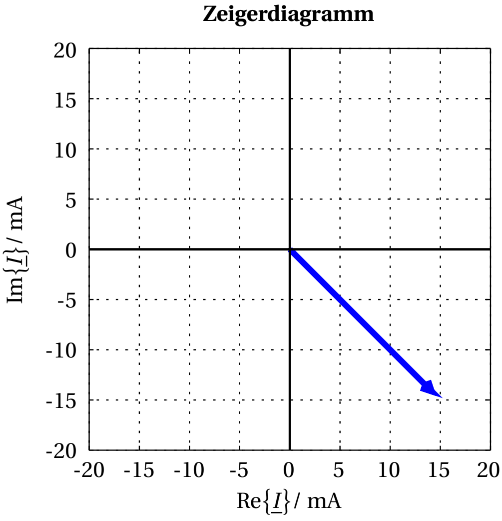
b) Geben Sie die Periodendauer T, die Kreisfrequenz ω, die Amplitude (Spitzenwert) $\hat{i}$ sowie den Effektivwert i_{eff} des Stromes $i(t)$ an.

c) Ermitteln Sie den komplexen Strom $\underline{i}(t)$ und den reellen Strom $i(t)$.

d) Stellen Sie $i(t)$ für $-2\ \text{ms} \leq t \leq 2\ \text{ms}$ in einem Diagramm dar.

Lösung der Übungsaufgabe 2.6 (Seite 67)

a) Zeigerdiagramm von $\underline{I}$



b) Periodendauer, Kreisfrequenz, Spitzen- und Effektivwert

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{500\ \text{Hz}} = 2\ \text{ms}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 500\ \text{Hz} = 3141{,}6\ \text{s}^{-1}$$

$$\hat{i} = |\underline{I}| \cdot \sqrt{2} = 28{,}284\ \text{mA}$$

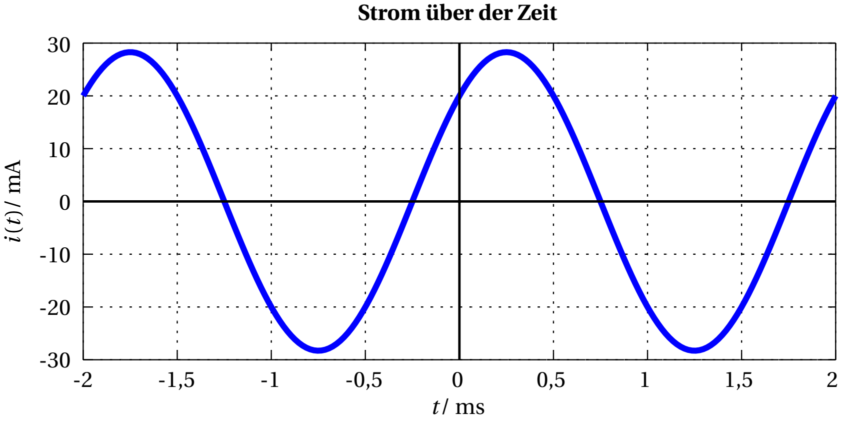
$$i_{\text{eff}} = |\underline{I}| = 20\ \text{mA}$$

c) Komplexer Strom $\underline{i}(t)$ und reeller Strom $i(t)$

$$\underline{i}(t) = \sqrt{2}\,\underline{I}\,\mathrm{e}^{j\omega t} = \hat{i}\,\mathrm{e}^{j(\omega t - \pi/4)}$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\{\underline{i}(t)\} = \hat{i}\,\cos(\omega t - \pi/4)$$

d) Stromverlauf $i(t)$



Octave-Datei: `loesung_02_06.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 2.6

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
I = 20e-3*exp(-j*pi/4) % A  (Komplexe Amplitude, Effektivwert)
f = 500;               % Hz
tmin = -2e-3;          % s
tmax = 2e-3;           % s
Imax = 20e-3;          % Skalierung des Zeigerdiagramms (in Ampere)
disp("Vorgaben");
disp(["   I = (",num2str(I*1e3),") mA"]);
disp(["   f = ",num2str(f*1e-3)," kHz"]);
disp(["tmin = ",num2str(tmin*1e3)," ms"]);
disp(["tmax = ",num2str(tmax*1e3)," ms"]);
disp(" ");

% =========================================================
% Funktion zur grafischen Darstellung eines Zeigers
function pX = makepointer(x,s)
x = x(:);
d = x*s./abs(x);
pX = [zeros(length(x),1),x,x-d*(1+j/2),x,x-d*(1-j/2)].';
endfunction
% =========================================================

% Erzeugung des Zeigers (Linie und Pfeilspitze)
pI = makepointer(I,Imax/20);

% Darstellung des Zeigerdiagramms
hFig1 = figure("Name","Zeigerdiagramm");
hPlot1 = plot(pI*1e3,"b");
axis([-Imax,Imax,-Imax,Imax]*1e3);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm","FontSize",14);
xlabel("Re\\{I\\} / mA","FontSize",12);
ylabel("Im\\{I\\} / mA","FontSize",12);
```

Octave-Datei: `loesung_02_06.m` (Fortsetzung)

```
% Periodendauer, Kreisfrequenz, Spitzen- und Effektivwert
T = 1/f;
w = 2*pi*f;
i_s = abs(I)*sqrt(2);
i_eff = abs(I);
disp("Periodendauer, Kreisfrequenz, Spitzen- und Effektivwert");
disp(["    T = ",num2str(T*1e3)," ms"]);
disp(["    w = ",num2str(w)," s⁻¹"]);
disp(["  i_s = ",num2str(i_s*1e3)," mA"]);
disp(["i_eff = ",num2str(i_eff*1e3)," mA"]);
disp(" ");

% Festlegung der Stützstellen
N = 200;
n = 0:(N-1);

% Zeitachse erstellen
t = n*(tmax-tmin)/(N-1)+tmin;

% Berechnung des Zeitverlaufs des Stromes (Augenblickswerte)
i = sqrt(2)*abs(I)*cos(2*pi*f*t+angle(I));

% Darstellung des Stromverlaufs
hFig2 = figure("Name","Strom über der Zeit");
hPlot2 = plot(t*1e3,i*1e3,"b"); % t in ms, i in mA
grid on;
title("\\bf Strom über der Zeit","FontSize",14);
xlabel("t / ms","FontSize",12);
ylabel("i(t) / mA","FontSize",12);
```

Übung 2.7 Addition von Spannungen

Die Spannungen $u_1(t) = \hat{u}_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ und $u_2(t) = \hat{u}_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ werden addiert, wobei $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$, $\hat{u}_1 = 5\,\mathrm{V}$, $\varphi_1 = 30°$, $\hat{u}_2 = 10\,\mathrm{V}$ und $\varphi_2 = -\pi/4$ ist.

Die Summe $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ kann in der Form $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi)$ dargestellt werden.

a) Berechnen Sie $u(t)$ durch Anwendung des Kosinussatzes (2.17) und (2.18).

b) Berechnen Sie $u(t)$ mithilfe der komplexen Amplituden.

c) Stellen Sie $u_1(t)$, $u_2(t)$ und $u(t)$ mit Octave in einem gemeinsamen Diagramm dar. Wählen Sie einen geeigneten Darstellungsbereich aus und berechnen Sie $u(t)$ durch direkte Addition der Stützwerte.

Lösung der Übungsaufgabe 2.7 (Seite 67)

a) Kosinussatz

$$\hat{u} = \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2\hat{u}_1\hat{u}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \sqrt{25\,\mathrm{V}^2 + 100\,\mathrm{V}^2 + 2\cdot 50\,\mathrm{V}^2\cdot\cos(30° + 45°)}$$
$$\hat{u} = 12{,}283\,\mathrm{V}$$

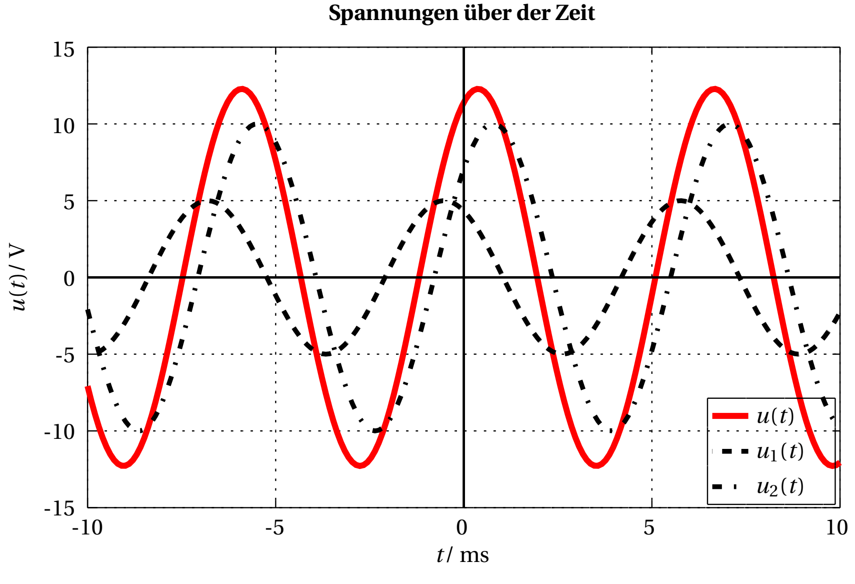
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\hat{u}_1\sin(\varphi_1) + \hat{u}_2\sin(\varphi_2)}{\hat{u}_1\cos(\varphi_1) + \hat{u}_2\cos(\varphi_2)}\right) = \arctan\left(\frac{5\,\mathrm{V}\cdot\sin(30°) + 10\,\mathrm{V}\cdot\sin(-45°)}{5\,\mathrm{V}\cdot\cos(30°) + 10\,\mathrm{V}\cdot\cos(-45°)}\right)$$
$$\varphi = -21{,}8°$$

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi)$$

b) Komplexe Amplituden

$$\underline{\hat{U}}_1 = \hat{u}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} = 5\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}30°} = \left(4{,}33 + \mathrm{j}2{,}5\right)\mathrm{V}$$
$$\underline{\hat{U}}_2 = \hat{u}_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = 10\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}45°} = \left(7{,}07 - \mathrm{j}7{,}07\right)\mathrm{V}$$
$$\underline{\hat{U}} = \underline{\hat{U}}_1 + \underline{\hat{U}}_2 = \left(11{,}4 - \mathrm{j}4{,}57\right)\mathrm{V} = 12{,}283\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}21{,}8°}$$

c) Spannungsverläufe $u(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$



Octave-Datei: `loesung_02_07.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 2.7

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
u1_s = 5;          % V    (Spitzenwert)
phi1 = 30*pi/180;
u2_s = 10;         % V    (Spitzenwert)
phi2 = -pi/4;
w = 1000;          % s^-1 (Kreisfrequenz)
tmin = -1e-2;      % s
tmax = 1e-2;       % s
disp("Vorgaben");
disp(["u1_s = ",num2str(u1_s)," V"]);
disp(["phi1 = ",num2str(180*phi1/pi),"°"]);
disp(["u2_s = ",num2str(u2_s)," V"]);
disp(["phi2 = ",num2str(180*phi2/pi),"°"]);
disp(["   w = ",num2str(w)," s^-1"]);
disp(["tmin = ",num2str(tmin*1e3)," ms"]);
disp(["tmax = ",num2str(tmax*1e3)," ms"]);
disp(" ");

% Kosinussatz
disp("Kosinussatz");
u_s = sqrt(u1_s^2+u2_s^2+2*u1_s*u2_s*cos(phi1-phi2));
phi = atan((u1_s*sin(phi1)+u2_s*sin(phi2))/...
           (u1_s*cos(phi1)+u2_s*cos(phi2)));
disp(["u_s = ",num2str(u_s)," V"]);
disp(["phi = ",num2str(180*phi/pi),"°"]);
disp(" ");

% Komplexe Amplituden
U1 = u1_s*exp(j*phi1);
U2 = u2_s*exp(j*phi2);
U = U1+U2;
u_s = abs(U);
phi = angle(U);
disp("Komplexe Amplitude (Spitzenwerte)");
disp([" U1 = (",num2str(U1),") V"]);
disp([" U2 = (",num2str(U2),") V"]);
disp(["  U = (",num2str(U),") V"]);
disp(["u_s = ",num2str(u_s)," V"]);
disp(["phi = ",num2str(180*phi/pi),"°"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_02_07.m` (Fortsetzung)

```
% Festlegung der Stützstellen
N = 200;
n = 0:(N-1);

% Zeitachse erstellen
t = n*(tmax-tmin)/(N-1)+tmin;

% Berechnung des Zeitverlaufs der Spannungen (Augenblickswerte)
u1 = u1_s*cos(w*t+phi1);
u2 = u2_s*cos(w*t+phi2);
u = u1+u2;

% Darstellung desr Spannungsverläufe
hFig1 = figure("Name","Spannungen über der Zeit");
hPlot1 = plot(t*1e3,u,"r-",t*1e3,u1,"k--",t*1e3,u2,"k-."); % t in ms
grid on;
title("\\bf Spannung über der Zeit","FontSize",14);
xlabel("t / ms","FontSize",12);
ylabel("u(t) / V","FontSize",12);
legend(hPlot1,"u(t)","u_1(t)","u_2(t)","location","southeast");
```

Übung 2.8 Differentiation von Zeitsignalen

Der Strom durch eine Kapazität C ergibt sich gemäß

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \hat{i}\cos(2\pi f t + \varphi_i)$$

aus der Spannung.

Im Folgenden ist $C = 10^{-6}$ A·s/V und $u(t) = \hat{u}\cos(2\pi f t + \varphi_u)$ mit $\hat{u} = 10\,\mathrm{V}$, $f = 1\,\mathrm{kHz}$ und $\varphi_u = 30°$.

a) Berechnen Sie $i(t)$ unmittelbar durch Differentiation der Spannung $u(t)$.

b) Berechnen Sie $i(t)$ durch Anwendung der komplexen Amplituden.

c) Stellen Sie $u(t)$ mit Octave in einem Diagramm dar. Wählen Sie dazu ein geeignetes Darstellungsintervall.

d) Bestimmen Sie den Strom $i(t)$ durch numerische Differentiation der Spannung mit Octave und stellen Sie das Ergebnis in einem Diagramm dar.

e) Geben Sie die Amplitude $\hat{i}$ und die Phasenlage φ_i des Stromes an. Wie groß ist die Phasenverschiebung $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ zwischen Spannung und Strom?

Lösung der Übungsaufgabe 2.8 (Seite 68)

a) Differentiation der Spannung $u(t)$

$$\begin{aligned} i(t) &= C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = C\hat{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(2\pi f t + \varphi_u) = -2\pi f C\hat{u}\sin(2\pi f t + \varphi_u) \\ &= 2\pi f C\hat{u}\cos(2\pi f t + \varphi_u + 90^\circ) = \hat{i}\cos(2\pi f t + \varphi_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{i} &= 2\pi f C\hat{u} = 2\pi\cdot 1\ \mathrm{kHz}\cdot 10^{-6}\ \mathrm{A{\cdot}s/V}\cdot 10\ \mathrm{V} = 62{,}832\ \mathrm{mA} \\ \varphi_i &= \varphi_u + 90^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ \end{aligned}$$

b) Anwendung der komplexen Amplituden

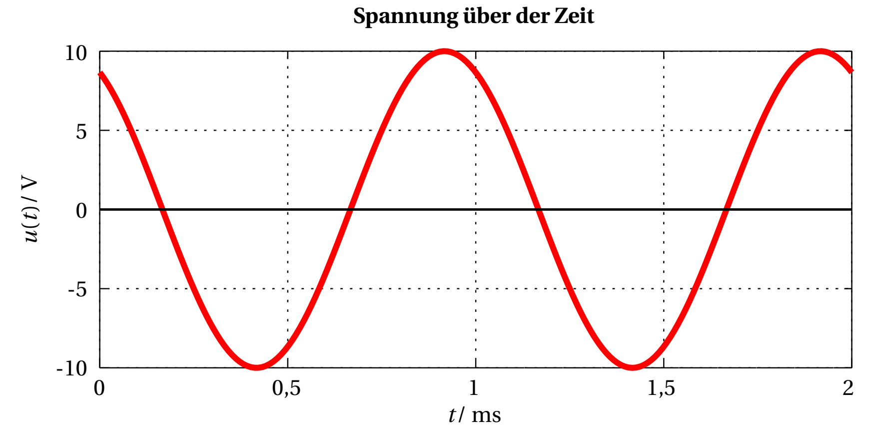
$$\underline{i}(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{u}(t) = C\hat{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f t + \varphi_u)} = \mathrm{j}2\pi f C\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f t + \varphi_u)}$$

$$\underline{i}(t) = \overbrace{\mathrm{j}2\pi f C\underbrace{\hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}}_{=\hat{\underline{U}}}}^{=\hat{\underline{I}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\underline{I}} = \mathrm{j}2\pi f C\hat{\underline{U}}$$

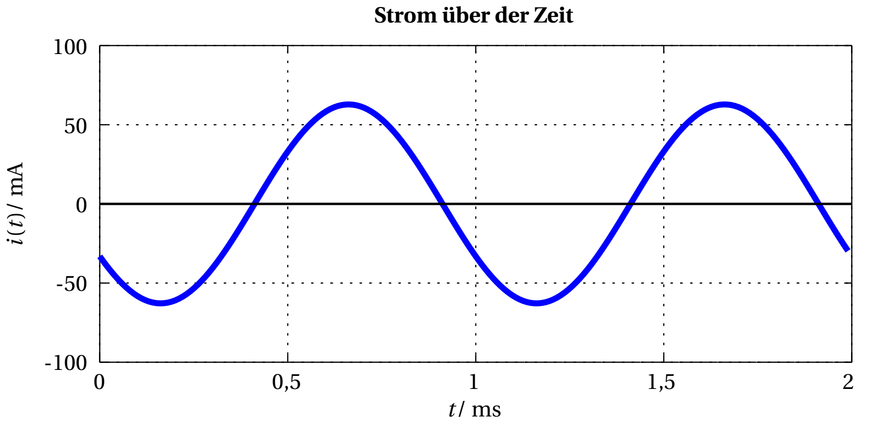
$$\begin{aligned} \hat{\underline{U}} &= \hat{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} = 10\ \mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ} = \left(8{,}66 + \mathrm{j}5\right)\ \mathrm{V} \\ \hat{\underline{I}} &= \mathrm{j}2\pi f C\hat{\underline{U}} = \mathrm{e}^{j90^\circ}\cdot 2\pi\cdot 1\ \mathrm{kHz}\cdot 1\ \mu\mathrm{F}\cdot 10\ \mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ} \\ &= 62{,}832\ \mathrm{mA}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ} = \left(-31{,}416 + \mathrm{j}54{,}414\right)\ \mathrm{mA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{i} &= |\hat{\underline{I}}| = 62{,}832\ \mathrm{mA} \\ \varphi_i &= \arg\left\{\hat{\underline{I}}\right\} = 120^\circ \end{aligned}$$

c) Spannungsverlauf $u(t)$



d) Stromverlauf $i(t)$



e) Amplitude, Phasenlage und Phasenverschiebung

$\hat{i} = 62{,}832\ \mathrm{mA}$

$\varphi_i = 120°$

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 30° - 120° = -90°$

Octave-Datei: `loesung_02_08.m`

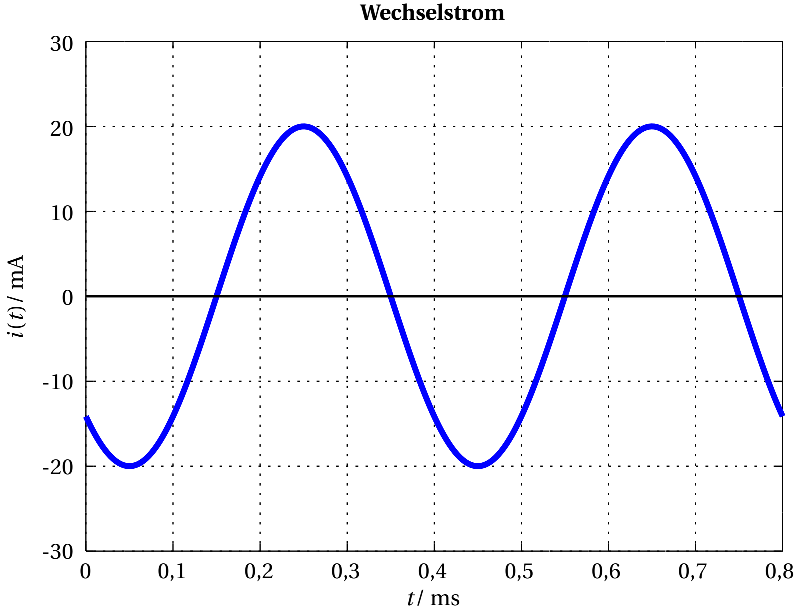
```
% Lösung der Übungsaufgabe 2.8

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
u_s = 10;          % V   (Spitzenwert)
C =1e-6;           % F
f = 1e3;           % Hz
phiu = 30*pi/180;  % Grad -> Radiant
tmin = 0;   % Skalierung der Zeitachse
tmax = 2/f; % zwei Perioden
disp("Vorgaben");
disp([" u_s = ",num2str(u_s)," V"]);
disp(["phiu = ",num2str(180*phiu/pi),"°"]);
disp(["   C = ",num2str(C*1e6)," uF"]);
disp(["   f = ",num2str(f*1e-3)," kHz"]);
disp(["tmin = ",num2str(tmin*1e3)," ms"]);
disp(["tmax = ",num2str(tmax*1e3)," ms"]);
disp(" ");

% Berechnung der Kenngrößen des Stromes
% durch Differentiation der Spannung
i_s = 2*pi*f*C*u_s;
phii = phiu+pi/2;
disp(["Berechnung der Kenngrößen des Stromes ",...
      "durch Differentiation der Spannung"]);
disp([" i_s = ",num2str(i_s*1e3)," mA"]);
disp(["phii = ",num2str(180*phii/pi),"°"]);
disp(" ");

% Berechnung der Kenngrößen des Stromes
% durch Anwendung der komplexen Amplituden
U = u_s*exp(j*phiu);
I = j*2*pi*f*C*U;
i_s = abs(I);
phii = angle(I);
disp(["Berechnung der Kenngrößen des Stromes ",...
      "durch Anwendung der komplexen Amplituden"]);
disp(["   U = (",num2str(U),") V"]);
disp(["   I = (",num2str(I*1e3),") mA"]);
disp([" i_s = ",num2str(i_s*1e3)," mA"]);
disp(["phii = ",num2str(180*phii/pi),"°"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_02_08.m` (Fortsetzung)

```
% Festlegung der Stützstellen
N = 200;
n = 0:(N-1);

% Zeitachse erstellen
t = n*(tmax-tmin)/(N-1)+tmin;

% Berechnung des Zeitverlaufs der Spannung (Augenblickswerte)
u = u_s*cos(2*pi*f*t+phiu);

% Numerische Differentiation
i = C*diff(u)./diff(t); % length(i) = length(u)-1
i = [i,NaN]; % Vektorlänge anpassen
% Anmerkung: Bei der Differentiation werden die Differenzen
% zwischen zwei Stützstellen gebildet, so dass die Anzahl
% der Elemente des Ergebnisvektors um eins verringert ist.

% Darstellung des Spannungsverlaufs
hFig1 = figure("Name","Spannung über der Zeit");
hPlot1 = plot(t*1e3,u,"r"); % t in ms, u in V
grid on;
title("\\bf Spannung über der Zeit","FontSize",14);
xlabel("t / ms","FontSize",12);
ylabel("u(t) / V","FontSize",12);

% Darstellung des Stromverlaufs
hFig2 = figure("Name","Strom über der Zeit");
hPlot2 = plot(t*1e3,i*1e3,"b"); % t in ms, i in mA
grid on;
title("\\bf Strom über der Zeit","FontSize",14);
xlabel("t / ms","FontSize",12);
ylabel("i(t) / mA","FontSize",12);
```

Übung 2.9 Zeitabhängigkeit

Im Diagramm ist ein Wechselstrom $i(t)$ dargestellt.



a) Entnehmen Sie dem Diagramm den Spitzenwert $\hat{i}$, die Periodendauer T sowie die Phase φ des Stromes. Geben Sie die Funktion $i(t)$ an.

b) Bestimmen Sie die Frequenz f, die Kreisfrequenz ω und den Effektivwert i_{eff} des im Diagramm dargestellten Stromes.

c) Ermitteln Sie die komplexen Amplituden $\underline{\hat{I}}$ und $\underline{I}$.

d) Stellen Sie die komplexe Amplitude $\underline{\hat{I}}$ in einem Zeigerdiagramm dar.

Lösung der Übungsaufgabe 2.9 (Seite 68)

a) Kenngrößen des Stromes (aus dem Diagramm abgelesen)

Zur Ermittlung der Periodendauer betrachte man die Nulldurchgänge des Stromes. Der Abstand zwischen zwei direkt aufeinander folgenden Nulldurchgängen beträgt hier 0,2 ms und entspricht der halben Periodendauer.
Das Maximum des Stromes ist um $\Delta t = 0{,}25$ ms nach rechts (negativ) verschoben. Aus Δt lässt sich bei Kenntnis der Periodendauer die Phasenlage bestimmen.

$$\hat{i} = 20\ \text{mA}$$

$$T = 0{,}4\ \text{ms}$$

$$\varphi = -\frac{\Delta t}{T} \cdot 360^\circ = -\frac{0{,}25\ \text{ms}}{0{,}4\ \text{ms}} \cdot 360^\circ = -225^\circ \mathrel{\widehat{=}} 135^\circ$$

b) Frequenz f, Kreisfrequenz ω und Effektivwert i_{eff}

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}4\ \text{ms}} = 2{,}5\ \text{kHz}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}4\ \text{ms}} = 15708\ \text{s}^{-1}$$

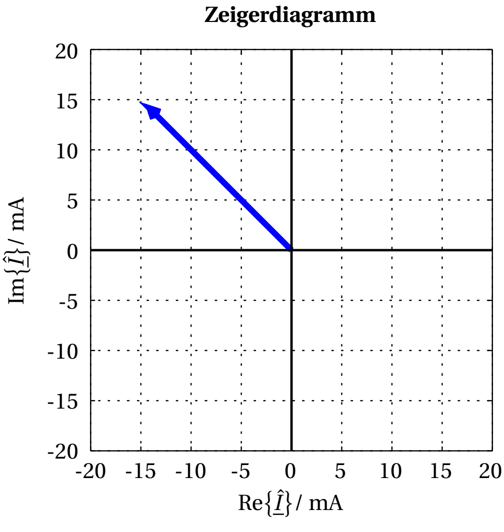
$$i_{\text{eff}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = \frac{20\ \text{mA}}{\sqrt{2}} = 14{,}142\ \text{mA}$$

c) Komplexe Amplituden $\underline{\hat{I}}$ und $\underline{I}$

$$\underline{\hat{I}} = \hat{i}\,\mathrm{e}^{j\varphi} = 20\ \text{mA} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,135^\circ}$$

$$\underline{I} = i_{\text{eff}}\,\mathrm{e}^{j\varphi} = 14{,}142\ \text{mA} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,135^\circ}$$

d) Zeigerdiagramm von $\underline{\hat{I}}$



Octave-Datei: `loesung_02_09.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 2.9

% Vorgaben (Aufgabenstellung/Diagramm)
i_s = 20e-3;    % A  (Spitzenwert)
T   = 0.4e-3;   % s  (Periodendauer)
dt  = -0.25e-3; % s  (zeitliche Verschiebung)
disp("Vorgaben (Diagramm)");
disp(["i_s = ",num2str(i_s*1e3)," mA"]);
disp(["  T = ",num2str(T*1e3)," ms"]);
disp([" dt = ",num2str(dt*1e3)," ms"]);
disp(" ");

% Berechnung der Phasenverschiebung
phi = dt*2*pi/T;
phi = phi-2*pi*round(phi/(2*pi)-eps); % -pi < phi <= pi
disp("Phasenverschiebung");
disp(["phi = ",num2str(180*phi/pi),"°"]);
disp(" ");

% Frequenz, Kreisfrequenz, Effektivwert
f = 1/T;
w = 2*pi/T;
i_eff = i_s/sqrt(2);
disp("Frequenz, Kreisfrequenz, Effektivwert");
disp(["    f = ",num2str(f*1e-3)," kHz"]);
disp(["    w = ",num2str(w)," s^-1"]);
disp(["i_eff = ",num2str(i_eff*1e3)," mA"]);
disp(" ");

% Komplexe Amplitude
Is = i_s*exp(j*phi); % Spitzenwert
Ieff = Is/sqrt(2);  % Effektivwert
disp("Komplexe Amplitude");
disp(["Spitzenwert:   Is = (",num2str(Is*1e3),") mA"]);
disp(["Effektivwert: Ieff = (",num2str(Ieff*1e3),") mA"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_02_09.m` (Fortsetzung)

```
% =========================================================
% Funktion zur grafischen Darstellung eines Zeigers
function pX = makepointer(x,s)
x = x(:);
d = x*s./abs(x);
pX = [zeros(length(x),1),x,x-d*(1+j/2),x,x-d*(1-j/2)].';
endfunction
% =========================================================

% Erzeugung des Zeigers (Linie und Pfeilspitze)
Imax = i_s; % Skalierung des Diagramms
pIs = makepointer(Is,Imax/20);

% Darstellung des Zeigerdiagramms
hFig1 = figure("Name","Zeigerdiagramm");
hPlot1 = plot(pIs*1e3,"b");
axis([-Imax,Imax,-Imax,Imax]*1e3);
axis square;
grid on;
title("\\bf Zeigerdiagramm","FontSize",14);
xlabel("Re\\{Is\\} / mA","FontSize",12);
ylabel("Im\\{Is\\} / mA","FontSize",12);
```