Grundlagen der Elektrotechnik

Eine Einführung in die Gleich- und Wechselstromtechnik

Lösungen der Übungsaufgaben aus Kapitel 6

Reinhard Scholz

28. August 2019

Die Lösung der Übungsaufgaben erfolgt zunächst analytisch in allgemeiner Form. Anschließend wird die numerische Lösung angegeben, die mit einem Taschenrechner oder mit Octave nachvollzogen werden kann. In den beiliegenden Octave-Skripten ist es aus syntaktischen Gründen nicht möglich, alle im Text benutzten Variablennamen zu verwenden. Die Anpassung wurde jedoch so vorgenommen, dass eine Zuordnung leicht möglich ist.

Teilweise weicht die Vorgehensweise bei der Berechnung mit Octave deutlich von der analytischen Methode ab. Dies ist beispielsweise bei der Lösung von quadratischen Gleichungen der Fall. Hier wird nicht die quadratische Ergänzung verwendet, sondern die Koeffizienten des zugehörigen Polynoms werden als Vektor dargestellt, der einem Algorithmus zur Nullstellensuche übergeben wird.

Die in diesem Dokument eingebundenen Diagramme wurden einer Nachbearbeitung unterzogen, so dass deren Erscheinungsbild von der Bildschirmausgabe abweicht.

Netzwerkanalyse mit Oktave

Einige Übungsaufgaben dieses Kapitels werden mithilfe der Octave-Funktion `kpv` gelöst. Das Netzwerk wird dabei mit einer Netzliste beschrieben. Die Funktion wertet diese Netzliste unter Anwendung des Knotenpotenzialverfahrens aus und ist im Kapitel 6.7 auf Seite 184 beschrieben. An dieser Stelle soll noch einmal kurz der Aufbau der Netzliste dargestellt werden.

- Alle Zweige im Netzwerk werden lückenlos mit eins beginnend durchnummeriert.
- Alle Knoten werden mit null beginnend lückenlos durchnummeriert, wobei der Knoten 0 den Sternpunkt (Bezugsknoten) darstellt
- Die Netzliste besteht aus einer $n \times 5$-Matrix. Jede Zeile der Matrix beschreibt einen Zweipol, wobei die Zeilennummer der Zweignummer (Nummer des Zweipols) entspricht.
- Die ersten beiden Einträge einer Zeile enthalten die Knotennummern, zwischen denen der Zweig liegt. Die Zweigrichtung zeigt immer vom ersten zum zweiten Knoten.
- Der dritte Eintrag einer Zeile beinhaltet die Zweigadmittanz.
- Der vierte Eintrag einer Zeile beinhaltet die Quellspannung in diesem Zweig. Ist keine Spannungsquelle enthalten, so ist dieser Eintrag null.
- Der fünfte Eintrag einer Zeile beinhaltet den Quellstrom in diesem Zweig. Ist keine Stromquelle enthalten, so ist dieser Eintrag null.

Die Funktion wird durch den Befehl

```
[U,Uz,Iz] = kpv(net);
```

aufgerufen. Dabei ist `net` die oben beschriebene $n \times 5$-Matrix der Netzliste. Die Funktion gibt drei Vektoren zurück:

`U` Vektor der unabhängigen Spannungen

`Uz` Vektor aller Zweigspannungen

`Iz` Vektor aller Zweigströme

Ein Anwendungsbeispiel findet sich in der Lösung des Aufgabenpunktes f) der Übung 6.1 auf Seite 9.

Octave-Datei: kpv.m

```
function [U,Uz,Iz] = kpv(net)
% kpv: Netzwerkanalyse mittels Knotenpotentialverfahren
%
% Funktionsaufruf
%   [U,Uz,Iz] = kpv(net)
%
% Eingabe-Parameter
%   net     Netzliste mit Zweipoldaten
%
% Ausgabe-Parameter
%   U       Vektor der unabhängigen Spannungen (Knotenspannungen)
%   Uz      Vektor der Zweigspannungen
%   Iz      Vektor der Zweigströme
%
% Struktur der Netzliste
%   Die Netzliste ist eine n x 5 Matrix, wobei jede Zeile
%   einen Zweipol beschreibt. Die ersten beiden Elemente
%   enthalten die Knotennummern, an die der beschriebene
%   Zweipol angeschlossen ist. Die Zweigrichtung zeigt
%   immer vom ersten Knoten (erstes Element) zum zweiten
%   Knoten (zweites Element). Alle Spannungen und Ströme
%   im Zweig (auch die der Quellen) sind in Zweigrichtung
%   definiert. Das dritte Element ist die Zweigadmittanz.
%   Als viertes Element folgt die Quellspannung und als
%   fünftes der Quellstrom des jeweiligen Zweiges.
%
%   Die in der Netzliste verwendeten Knotenbezeichnungen
%   müssen mit null beginnend lückenlos durchnumeriert sein.
%   Jede Zeile der Netzliste muss zwei unterschiedliche
%   Knotennummern enthalten. Der Knoten null ist der Bezugsknoten
%   zu dem hin alle Knotenspannungen ermittelt werden.
%   Alle Wirkleitwerke müssen positiv sein (passives Netzwerk).
%   Es können sowohl reelle Leitwerte (Gleichstromnetz)
%   als auch komplexe Admittanzen angegeben werden.
%   Quellspannungen und Quellströme werden durch
%   komplexe Amplituden beschrieben.

% Voreinstellung der Rückgabewerte für den Fehlerfall
U = [];
Uz = [];
Iz = [];
```

Octave-Datei: `kpv.m` (Fortsetzung)

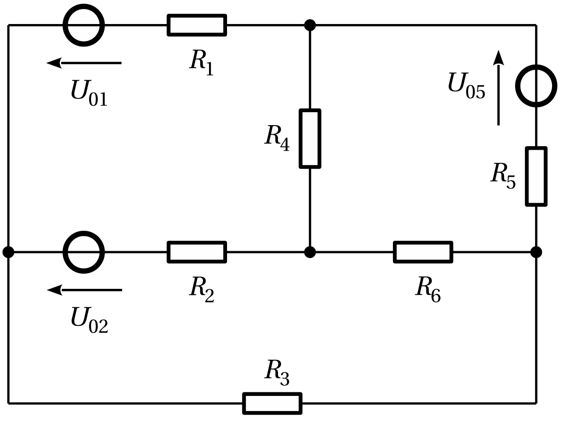
```
% Test der Netzliste
if size(net,2) ~= 5
  disp("FEHLER: Netzliste hat falsche Spaltenzahl!");
  return;
end
if min(abs([net(:,1)-net(:,2)])) == 0
  disp(["FEHLER: Zweipole müssen mit unterschiedlichen ",...
        "Knoten verbunden sein!"]);
  return;
end
if length(unique([net(:,1);net(:,2)])) ~= max([net(:,1);net(:,2)])+1
  disp(["FEHLER: Knoten müssen lückenlos mit 0 beginnend ",...
        "durchnumeriert sein!"]);
  return;
end
if prod(isfinite(net(:,3))) == 0
  disp("WARNUNG: Admittanzwerte müssen endlich sein!");
end

% Auswertung der Netzliste
L = size(net,1);              % Länge der Netzliste
K = max([net(:,1);net(:,2)]); % Anzahl der Knoten (ohne Bezugsknoten)

% Aufbau der Knotenleitwertmatrix und des Quellstromvektors
W = zeros(K);
I = zeros(K,1);
for l = 1:L
  i = net(l,1);
  j = net(l,2);
  if i > 0
    W(i,i) = W(i,i)+net(l,3); % Hauptdiagonalelement
    I(i) = I(i)+net(l,4)*net(l,3)-net(l,5); % Quellstromvektorelement
  end
  if j > 0
    W(j,j) = W(j,j)+net(l,3); % Hauptdiagonalelement
    I(j) = I(j)-net(l,4)*net(l,3)+net(l,5); % Quellstromvektorelement
  end
  if i*j > 0
    W(i,j) = W(i,j)-net(l,3); % Koppelelement
    W(j,i) = W(j,i)-net(l,3); % Koppelelement
  end
end
```

Octave-Datei: `kpv.m` (Fortsetzung)

```
% Berechnung der Knotenspannungen
U = (W^(-1))*I;

% Berechnung aller Spannungen und Ströme
Uz = zeros(L,1);
Iz = zeros(L,1);
for l = 1:L
  i = net(l,1);
  j = net(l,2);
  if i*j > 0
    Uz(l) = U(i)-U(j); % Verbindungszweige
  elseif i > 0
    Uz(l) = U(i); % Baumzweige (zum Bezugsknoten)
  elseif j > 0
    Uz(l) = U(j); % Baumzweige (vom Bezugsknoten)
  end
  if net(l,3) == 0
    Iz(l) = net(l,5); % Ideale Stromquelle
  else
    Iz(l) = (Uz(l)-net(l,4))*net(l,3)+net(l,5);
  endif
end

endfunction
```

Übung 6.1 Analyse eines Gleichstromnetzwerks

Das im Bild dargestellte Gleichstromnetzwerk ist zu untersuchen.



$U_{01} = 10\,\mathrm{V}$
$U_{02} = 15\,\mathrm{V}$
$U_{05} = 20\,\mathrm{V}$
$R_1 = 10\,\Omega$
$R_2 = 10\,\Omega$
$R_3 = 10\,\Omega$
$R_4 = 10\,\Omega$
$R_5 = 10\,\Omega$
$R_6 = 10\,\Omega$

a) Skizzieren Sie den Grafen und einen möglichen Baum. Geben Sie die Anzahl der Knoten k und die Anzahl der Zweige z an.

b) Stellen Sie unter Verwendung des Maschenstromverfahrens das Gleichungssystem für die unabhängigen Ströme auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem des Maschenstromverfahrens numerisch und geben Sie alle Zweigspannungen und Zweigströme an.

d) Bestimmen Sie ein Gleichungssystem mithilfe der Knotenpotenzialanalyse. Legen Sie dazu unabhängige Spannungen fest und stellen Sie zur Netzwerkanalyse einen geeigneten Baum auf.

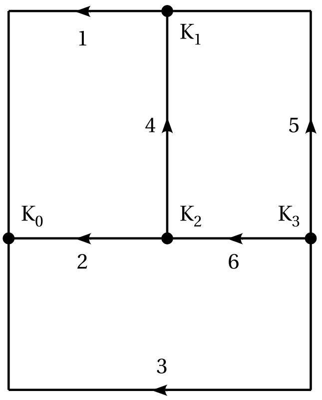
e) Lösen Sie das Gleichungssystem des Knotenpotenzialverfahrens numerisch und überprüfen Sie damit Ihre Lösung c).

f) Erstellen Sie eine Netzliste und wenden Sie zur Lösung des Problems die Octave-Funktion `kpv` (siehe Seite 186) an.

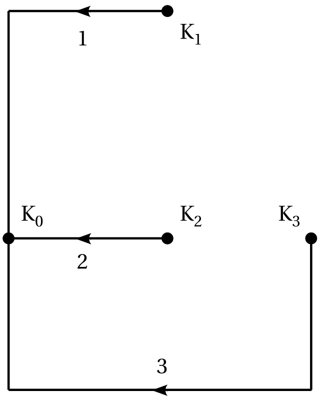
Lösung der Übungsaufgabe 6.1 (Seite 190)

a) Graf und Baum

Im Hinblick auf Aufgabenpunkt d) wird sofort ein sternförmiger Baum aufgestellt.



Graf



Baum

Anzahl der Knoten: $k = 4$
Anzahl der Zweige: $z = 6$

b) Gleichungssystem des Maschenstromverfahrens

Das Maschenstromverfahren liefert uns $n = z - k + 1 = 3$ Gleichungen für die drei unabhängigen Ströme I_4, I_5 und I_6.

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & R_1 & -R_2 \\ R_1 & R_1 + R_3 + R_5 & R_3 \\ -R_2 & R_3 & R_2 + R_3 + R_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{02} - U_{01} \\ -U_{01} - U_{05} \\ -U_{02} \end{pmatrix}$$

c) Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & R_1 & -R_2 \\ R_1 & R_1 + R_3 + R_5 & R_3 \\ -R_2 & R_3 & R_2 + R_3 + R_6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} U_{02} - U_{01} \\ -U_{01} - U_{05} \\ -U_{02} \end{pmatrix}$$

Lösung: $I_4 = 0{,}625\,\text{A}$, $I_5 = -1{,}25\,\text{A}$, $I_6 = 0{,}125\,\text{A}$.

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_4 + I_5 = -0{,}625\,\text{A} \\
I_2 &= I_6 - I_4 = -0{,}5\,\text{A} \\
I_3 &= -I_5 - I_6 = 1{,}125\,\text{A} \\
U_1 &= R_1\,I_1 + U_{01} = 3{,}75\,\text{V} \\
U_2 &= R_2\,I_2 + U_{02} = 10\,\text{V} \\
U_3 &= R_3\,I_3 = 11{,}25\,\text{V} \\
U_4 &= R_4\,I_4 = 6{,}25\,\text{V} \\
U_5 &= R_5\,I_5 + U_{05} = 7{,}5\,\text{V} \\
U_6 &= R_6\,I_6 = 1{,}25\,\text{V}
\end{aligned}$$

d) Gleichungssystem des Knotenpotenzialverfahrens

Da wir im Aufgabenpunkt a) bereits einen sternförmigen Baum aufgestellt hatten, können wir diesen nun ebenfalls für das Knotenpotenzialverfahren verwenden. Das Knotenpotenzialverfahren liefert uns $n = k - 1 = 3$ Gleichungen für die drei unabhängigen Spannungen U_1, U_2 und U_3.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_{01}}{R_1} - \frac{U_{05}}{R_5} \\ \frac{U_{02}}{R_2} \\ \frac{U_{05}}{R_5} \end{pmatrix}$$

e) Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{U_{01}}{R_1} - \frac{U_{05}}{R_5} \\ \frac{U_{02}}{R_2} \\ \frac{U_{05}}{R_5} \end{pmatrix}$$

Lösung: $U_1 = 3{,}75\,\mathrm{V}$, $U_2 = 10\,\mathrm{V}$, $U_3 = 11{,}25\,\mathrm{V}$.

$$U_4 = U_2 - U_1 = 6{,}25\,\mathrm{V}$$

$$U_5 = U_3 - U_1 = 7{,}5\,\mathrm{V}$$

$$U_6 = U_3 - U_2 = 1{,}25\,\mathrm{V}$$

$$I_1 = \frac{U_1 - U_{01}}{R_1} = -0{,}625\,\mathrm{A}$$

$$I_2 = \frac{U_2 - U_{02}}{R_2} = -0{,}5\,\mathrm{A}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 1{,}125\,\mathrm{A}$$

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = 0{,}625\,\mathrm{A}$$

$$I_5 = \frac{U_5 - U_{05}}{R_5} = -1{,}25\,\mathrm{A}$$

$$I_6 = \frac{U_6}{R_6} = 0{,}125\,\mathrm{A}$$

f) Netzliste des Netzwerks

K+	K−	Zweigadmittanz	Quellspannung	Quellstrom
1	0	$1/R_1$	U_{01}	0
2	0	$1/R_2$	U_{02}	0
3	0	$1/R_3$	0	0
2	1	$1/R_4$	0	0
3	1	$1/R_5$	U_{05}	0
3	2	$1/R_6$	0	0

Wir setzen die Netzliste in die Matrix-Darstellung von Octave um und berechnen alle Ströme und Spannungen im Netzwerk mit dem Knotenpotenzialverfahren.

```
net = [ ...
  1,0,1/R1,U01,0;...
  2,0,1/R2,U02,0;...
  3,0,1/R3,0,0;...
  2,1,1/R4,0,0;...
  3,1,1/R5,U05,0;...
  3,2,1/R6,0,0 ];
[U,Uz,Iz] = kpv(net); % Netzwerkanalyse
```

Die Funktion `kpv` liefert neben den unabhängigen Spannungen `U` auch alle Zweigspannungen `Uz` sowie alle Zweigströme `Iz`, wenn sie, wie oben dargestellt, mit einer Liste von Rückgabevariablen aufgerufen wird.

$U_1 = 3{,}75\,\text{V}$

$U_2 = 10\,\text{V}$

$U_3 = 11{,}25\,\text{V}$

$U_4 = 6{,}25\,\text{V}$

$U_5 = 7{,}5\,\text{V}$

$U_6 = 1{,}25\,\text{V}$

$I_1 = -0{,}625\,\text{A}$

$I_2 = -0{,}5\,\text{A}$

$I_3 = 1{,}125\,\text{A}$

$I_4 = 0{,}625\,\text{A}$

$I_5 = -1{,}25\,\text{A}$

$I_6 = 0{,}125\,\text{A}$

Octave-Datei: `loesung_06_01.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 6.1

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R1 = 10; % Ohm
R2 = 10; % Ohm
R3 = 10; % Ohm
R4 = 10; % Ohm
R5 = 10; % Ohm
R6 = 10; % Ohm
U01 = 10; % Volt
U02 = 15; % Volt
U05 = 20; % Volt
disp("Vorgaben");
disp(["  R1  = ",num2str(R1)," Ohm"]);
disp(["  R2  = ",num2str(R2)," Ohm"]);
disp(["  R3  = ",num2str(R3)," Ohm"]);
disp(["  R4  = ",num2str(R4)," Ohm"]);
disp(["  R5  = ",num2str(R5)," Ohm"]);
disp(["  R6  = ",num2str(R6)," Ohm"]);
disp(["  U01 = ",num2str(U01)," V"]);
disp(["  U02 = ",num2str(U02)," V"]);
disp(["  U05 = ",num2str(U05)," V"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_06_01.m` (Fortsetzung)

```
% Maschenstromverfahren
Z = [ ... % Maschenimpedanzmatrix (Maschenwiderstandsmatrix)
  R1+R2+R4, R1, -R2; ...
  R1, R1+R3+R5, R3; ...
  -R2, R3, R2+R3+R6 ];
U0 = [ ... % Quellspannungsvektor
  U02-U01; -U01-U05; -U02 ];

% Lösung des Gleichungssystems
I = (Z^(-1))*U0; % Vektor der unabhängigen Ströme

% Berechnung aller Spannungen und Ströme im Netzwerk
I4m = I(1);
I5m = I(2);
I6m = I(3);
I1m = I4m+I5m;
I2m = I6m-I4m;
I3m = -I5m-I6m;
U1m = R1*I1m+U01;
U2m = R2*I2m+U02;
U3m = R3*I3m;
U4m = R4*I4m;
U5m = R5*I5m+U05;
U6m = R6*I6m;

% Ergebnis des Maschenstromverfahrens
disp("Spannungen und Ströme im Netzwerk (Maschenstromverfahren) ");
disp([" U1m  = ",num2str(U1m)," V"]);
disp([" U2m  = ",num2str(U2m)," V"]);
disp([" U3m  = ",num2str(U3m)," V"]);
disp([" U4m  = ",num2str(U4m)," V"]);
disp([" U5m  = ",num2str(U5m)," V"]);
disp([" U6m  = ",num2str(U6m)," V"]);
disp([" I1m  = ",num2str(I1m)," A"]);
disp([" I2m  = ",num2str(I2m)," A"]);
disp([" I3m  = ",num2str(I3m)," A"]);
disp([" I4m  = ",num2str(I4m)," A"]);
disp([" I5m  = ",num2str(I5m)," A"]);
disp([" I6m  = ",num2str(I6m)," A"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_06_01.m` (Fortsetzung)

```
% Knotenpotenzialverfahren
Y = [ ... % Knotenadmittanzmatrix (Knotenleitwertmatrix)
  1/R1+1/R4+1/R5, -1/R4, -1/R5; ...
  -1/R4, 1/R2+1/R4+1/R6, -1/R6; ...
  -1/R5, -1/R6, 1/R3+1/R5+1/R6 ];
I0 = [ ... % Quellstromvektor
  U01/R1-U05/R5; U02/R2; U05/R5 ];

% Lösung des Gleichungssystems
U = (Y^(-1))*I0; % Vektor der unabhängigen Spannungen

% Berechnung aller Spannungen und Ströme im Netzwerk
U1k = U(1);
U2k = U(2);
U3k = U(3);
U4k = U2k-U1k;
U5k = U3k-U1k;
U6k = U3k-U2k;
I1k = (U1k-U01)/R1;
I2k = (U2k-U02)/R2;
I3k = U3k/R3;
I4k = U4k/R4;
I5k = (U5k-U05)/R5;
I6k = U6k/R6;

% Ergebnis des Knotenpotenzialverfahrens
disp("Spannungen und Ströme im Netzwerk (Knotenpotenzialverfahren) ");
disp([" U1k  = ",num2str(U1k)," V"]);
disp([" U2k  = ",num2str(U2k)," V"]);
disp([" U3k  = ",num2str(U3k)," V"]);
disp([" U4k  = ",num2str(U4k)," V"]);
disp([" U5k  = ",num2str(U5k)," V"]);
disp([" U6k  = ",num2str(U6k)," V"]);
disp([" I1k  = ",num2str(I1k)," A"]);
disp([" I2k  = ",num2str(I2k)," A"]);
disp([" I3k  = ",num2str(I3k)," A"]);
disp([" I4k  = ",num2str(I4k)," A"]);
disp([" I5k  = ",num2str(I5k)," A"]);
disp([" I6k  = ",num2str(I6k)," A"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_06_01.m` (Fortsetzung)

```
% Netzliste
net = [ ...
  1,0,1/R1,U01,0;...
  2,0,1/R2,U02,0;...
  3,0,1/R3,0,0;...
  2,1,1/R4,0,0;...
  3,1,1/R5,U05,0;...
  3,2,1/R6,0,0 ];

% Berechnung aller Zweigspannungen und -ströme
[U,Uz,Iz] = kpv(net);
disp("Spannungen und Ströme im Netzwerk (Auswertung der Netzliste) ");
for i=1:length(Uz)
  disp([" U",num2str(i),"z = ",num2str(Uz(i))," V"]);
endfor
for i=1:length(Iz)
  disp([" I",num2str(i),"z = ",num2str(Iz(i))," A"]);
endfor
disp(" ");
```

Übung 6.2 Netzwerkanalyse

Ein Netzwerk wird durch das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_4 + G_6 & -G_4 & -G_6 \\ -G_4 & G_2 + G_4 + G_5 + G_7 & -G_7 \\ -G_6 & -G_7 & G_3 + G_6 + G_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{0\mathrm{A}} \\ I_{0\mathrm{A}} \\ -I_{0\mathrm{B}} \end{pmatrix}$$

beschrieben.

a) Skizzieren Sie das zugehörige Netzwerk.

b) Ersetzen Sie die Stromquellen durch Spannungsquellen.

c) Skizzieren Sie den Grafen und einen möglichen Baum.

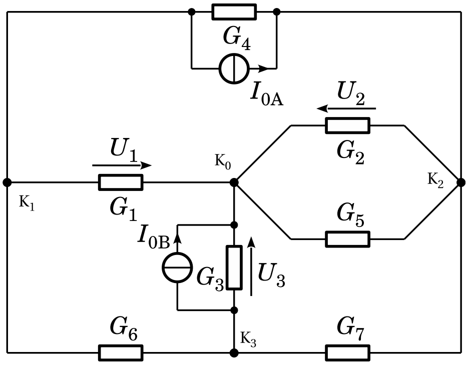
d) Führen Sie eine vollständige Maschenstromanalyse durch.

Lösung der Übungsaufgabe 6.2 (Seite 190)

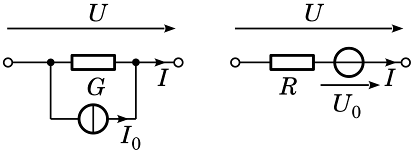
a) Schaltskizze des Netzwerks

Das Netzwerk besitzt $k = n + 1 = 4$ Knoten. Die Leitwerte in den Hauptdiagonalelementen sind mit dem jeweiligen Knoten verbunden. Die Leitwerte der Koppelelemente sind jeweils mit den beiden zugehörigen Knoten verbunden. Leitwerte, die nur in der Hauptdiagonale auftauchen, sind mit dem Sternpunkt (Knoten K_0) verbunden.

Stromquellen, die im Quellstromvektor nur einmal auftreten, liegen zwischen dem entsprechenden Knoten und dem Sternpunkt. Treten Stromquellen zweimal auf, so sind diese mit den beiden zugeordneten Knoten verbunden. Die Richtung wird durch das Vorzeichen festgelegt. Ein positives Vorzeichen beschreibt einen zufließenden Strom.



b) Quellenumwandlung



Die Spannung U sowie der Strom I müssen in beiden Zweipolen identisch sein. Mit $R = 1/G$ erhalten wir aus

$$U = (I - I_0)/G = R\,I - R\,I_0 \qquad \text{und} \qquad U = R\,I + U_0$$

sofort die Beziehung

$$U_0 = -R\,I_0\,,$$

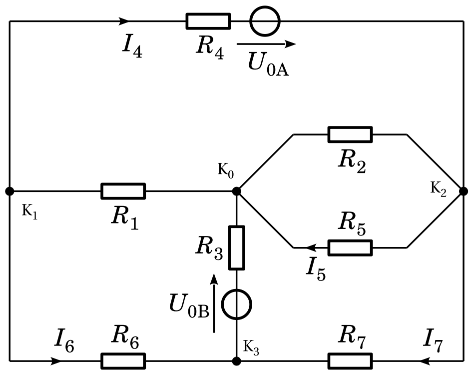
die wir auf die beiden realen Stromquellen in der Schaltung übertragen können.

$$U_{0A} = -I_{0A}/G_4 = -I_{0A}\,R_4$$

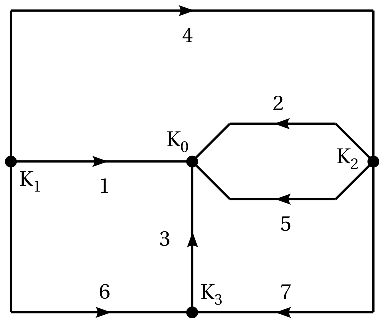
$$U_{0B} = -I_{0B}/G_3 = -I_{0B}\,R_3$$

Darüber hinaus drücken wir sämtliche Leitwerte durch Widerstände aus.

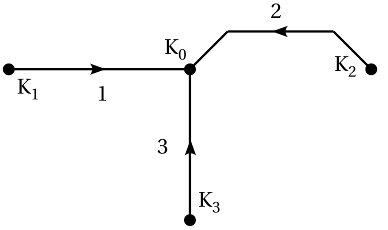
$R_\nu = 1/G_\nu \quad \text{mit } \nu = 1, 2, \ldots, 7$



c) Graf und Baum



Graf



Baum

Wir verwenden hier den Baum, der auch dem in der Aufgabenstellung gegebenen Gleichungssystem zu Grunde liegt.

d) Maschenstromanalyse

Das Netzwerk besitzt $k = 4$ und $z = 7$ Zweige. Damit liefert das Maschenstromverfahren $n = z - k + 1 = 4$ Gleichungen.

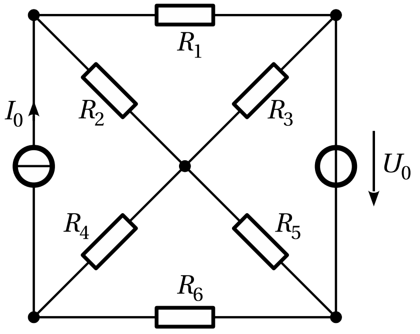
$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & -R_2 & R_1 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_5 & 0 & R_2 \\ R_1 & 0 & R_1 + R_3 + R_6 & R_3 \\ -R_2 & R_2 & R_3 & R_2 + R_3 + R_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{0A} \\ 0 \\ -U_{0B} \\ -U_{0B} \end{pmatrix}$$

Die unabhängigen Ströme lassen sich sodann berechnen.

$$\begin{pmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & -R_2 & R_1 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_5 & 0 & R_2 \\ R_1 & 0 & R_1 + R_3 + R_6 & R_3 \\ -R_2 & R_2 & R_3 & R_2 + R_3 + R_7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -U_{0A} \\ 0 \\ -U_{0B} \\ -U_{0B} \end{pmatrix}$$

Übung 6.3 Netzwerk mit idealen Quellen

Das dargestellte Netzwerk enthält eine ideale Spannungsquelle mit der Quellspannung $U_0 = 5\,\text{V}$ und eine ideale Stromquelle mit dem Quellstrom $I_0 = 2\,\text{mA}$. Alle Widerstände haben den Wert $1\,\text{k}\Omega$.



a) Wie viele Knoten und wie viele Zweige enthält das Netzwerk?

b) Welche Probleme treten bei der Anwendung des Knotenpotenzialverfahrens und des Maschenstromverfahrens auf?

c) Geben Sie eine äquivalente Schaltung an, in der nur Spannungsquellen auftauchen.

d) Geben Sie eine äquivalente Schaltung an, in der nur Stromquellen enthalten sind.

Nur die Spannung U_5, die über dem Widerstand R_5 abfällt, soll bestimmt werden.

e) Welches Verfahren setzen Sie ein? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Konstruieren Sie einen möglichst gut geeigneten Baum und stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf.

f) Vereinfachen Sie die Schaltung durch eine geeignete Zusammenfassung von Widerständen und Quellen.

g) Berechnen Sie U_5.

Lösung der Übungsaufgabe 6.3 (Seite 191)

a) Knoten und Zweige

Anzahl der Knoten:	$k = 5$
Anzahl der Zweige:	$z = 8$
Maschenstromanalyse:	**nicht anwendbar**
$n = z - k + 1 = 4$ Gleichungen	**falsch**
Knotenpotenzialanalyse:	**nicht anwendbar**
$n = k - 1 = 4$ Gleichungen	**falsch**

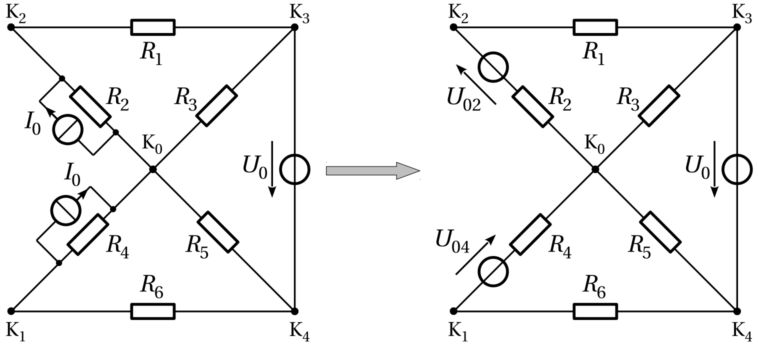
b) Probleme

Zwei Knoten sind über eine ideale Spannungsquelle mit dem Innenleitwert $G_0 = \infty$ miteinander verbunden. Die Knotenadmittanzmatrix (Knotenleitwertmatrix) kann daher nicht aufgestellt werden.

Ein Zweig des Netzwerks enthält eine ideale Stromquelle mit dem Innenwiderstand $R_0 = \infty$. Die Maschenimpedanzmatrix (Maschenwiderstandsmatrix) kann ebenfalls nicht aufgestellt werden.

Eine Quellenumwandlung (Spannungsquelle in Stromquelle und umgekehrt) ist bei idealen Quellen nicht möglich.

c) Äquivalente Schaltung mit Spannungsquellen

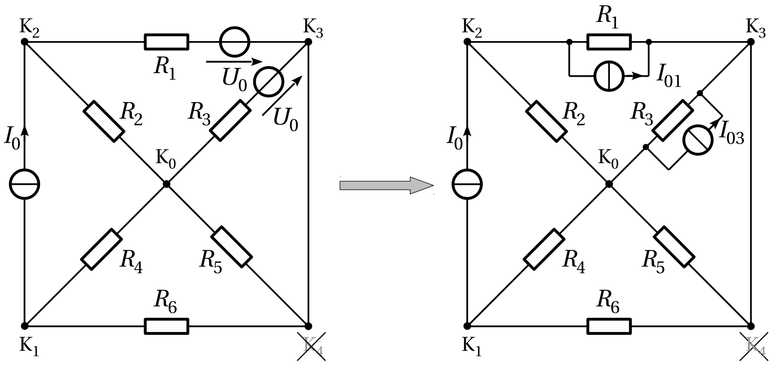


Zunächst ändern wir die Schaltung so ab, dass die ideale Stromquelle verschwindet. Wie wir in der linken Schaltung sehen, ändern sich die eingespeisten Quellströme an den Knoten K_1 und K_2 nicht. Im Knoten K_0 heben sich die eingespeisten Quellströme auf (vgl. Kapitel 6.4.3). Das elektrische Verhalten des Netzwerks bleibt dabei unverändert. Die realen Stromquellen wandeln wir nun in reale Spannungsquellen

$$U_{02} = -R_2, I_0 = -2\,\mathrm{V} \qquad \text{und} \qquad U_{04} = -R_4\, I_0 = -2\,\mathrm{V}$$

um (rechte Schaltung). Das Netzwerk besitzt nun $z = 7$ Zweige und kann mit dem Maschenstromverfahren analysiert werden.

d) Äquivalente Schaltung mit Stromquellen



Die Potenzialdifferenz zwischen dem rechten Anschluss von R_1 bzw. R_3 und dem Knoten K_4 bleibt auch nach der Verschiebung der Spannungsquellen erhalten (vgl. Kapitel 6.5.3). Allerdings verschmilzt der Knoten K_4 mit dem Knoten K_3. Das Netzwerk enthält somit nur noch $k = 4$ Knoten. In den Zweigen 1 und 3 treten jetzt reale Spannungsquellen auf, die in reale Stromquellen mit den Quellströmen

$$I_{01} = -\frac{U_0}{R_1} = -5\text{ mA} \qquad \text{und} \qquad I_{03} = -\frac{U_0}{R_3} = -5\text{ mA}$$

umgewandelt werden können. Das Netzwerk kann nun mit dem Knotenpotenzialverfahren berechnet werden.

e) Auswahl des Lösungsverfahrens zur Berechnung von U_5

Das abgeänderte Netzwerk aus Aufgabenpunkt c) enthält keine idealen Stromquellen und kann daher mit dem Maschenstromverfahren analysiert werden.

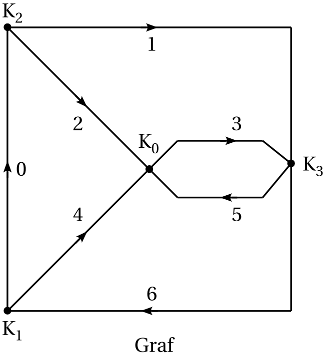
Anzahl der Knoten:	$k = 5$
Anzahl der Zweige:	$z = 7$
Maschenstromananalyse:	$n = z - k + 1 = 3$ Gleichungen

Das abgeänderte Netzwerk aus Aufgabenpunkt d) enthält keine idealen Spannungsquellen und kann mit dem Knotenpotenzialverfahren analysiert werden.

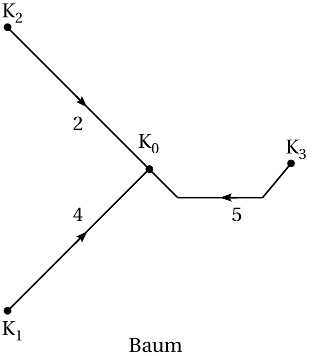
Anzahl der Knoten:	$k = 4$
Anzahl der Zweige:	$z = 7$
Knotenpotenzialanalyse:	$n = k - 1 = 3$ Gleichungen

Beide Verfahren liefern Gleichungssysteme mit drei Gleichungen. Da nur die Spannung U_5 bestimmt werden soll, bietet das Knotenpotenzialverfahren minimale Vorteile. Dazu muss der Zweig 5 ein Baumzweig sein. Als Sternpunkte kommen somit nur die Knoten K_0 und K_3 in Frage. (Beides ist möglich, da keine Vorgabe der Zählpfeilrichtung erfolgt ist.)

Wir wollen hier einen Baum mit dem Sternpunkt K_0 und den Baumzweigen 2, 4 und 5 verwenden.



Graf



Baum

Das Knotenpotenzialverfahren liefert uns das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6} & 0 & -\frac{1}{R_6} \\ 0 & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_4 \\ U_2 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_0 \\ I_0 - I_{01} \\ I_{01}+I_{03} \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} U_4 \\ U_2 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6} & 0 & -\frac{1}{R_6} \\ 0 & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -I_0 \\ I_0 - I_{01} \\ I_{01}+I_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}25\,\mathrm{V} \\ 2{,}25\,\mathrm{V} \\ -2{,}5\,\mathrm{V} \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Spannung beträgt $U_5 = -2{,}5\,\mathrm{V}$.

Bei der Berechnung mit Octave muss die Indizierung des Lösungsvektors berücksichtigt werden. Hier gilt der folgende Zusammenhang:

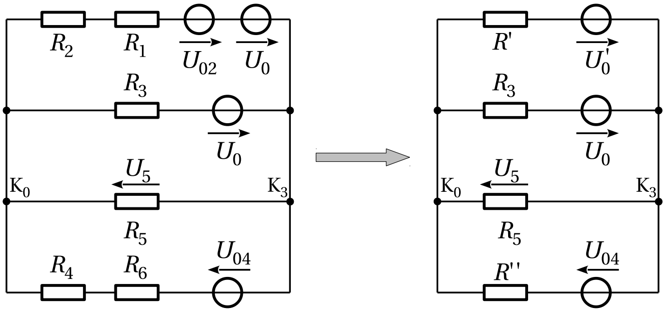
$U_4 = U(1)$

$U_2 = U(2)$

$U_5 = U(3)$

f) Vereinfachung der Schaltung (Zusammenfassen von Widerständen und Quellen)

Wir verwenden die rechte Schaltung aus Aufgabenpunkt c) mit den Spannungsquellen und schieben U_0 über Knoten K_3 in die Zweige 1 und 3, genau so, wie wir es in Aufgabenpunkt d) gemacht haben. Dann fassen wir die in Reihe geschalteten Widerstände R_1 und R_2 sowie R_4 und R_6 zusammen. Anschließend fassen wir auch die in Reihe geschalteten Spannungsquellen U_{02} und U_0 zusammen.



Die Werte der verbleibenden Widerstände und Quellspannungen können nun bestimmt werden.

$R' = R_1 + R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ $\qquad U_0' = U_0 + U_{02} = 3\,\mathrm{V}$

$R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ $\qquad U_0 = 5\,\mathrm{V}$

$R_5 = 1\,\mathrm{k\Omega}$

$R'' = R_4 + R_6 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ $\qquad U_{04} = 2\,\mathrm{V}$

g) Berechnung der Spannung U_5

Das resultierende Netzwerk aus Aufgabenpunkt f) enthält nur noch vier Zweige und zwei Knoten. Das Gleichungssystem des Knotenpotenzialverfahrens liefert uns eine einzige Gleichung, die wir unmittelbar aufschreiben können. Allerdings müssen wir dazu die Spannungsquellen in Stromquellen umwandeln. Es treten außerdem Leitwerte auf, die wir unmittelbar durch die Kehrwerte der Widerstände ausdrücken.

$$\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R''}\right) \cdot U_5 = -\frac{U_0'}{R'} - \frac{U_0}{R_3} + \frac{U_{04}}{R''}$$

$$U_5 = \frac{U_{04}\,R'\,R_3\,R_5 - U_0'\,R_3\,R_5\,R'' - U_0\,R'\,R_5\,R''}{R_3\,R_5\,R'' + R'\,R_5\,R'' + R'\,R_3\,R'' + R'\,R_3\,R_5} = -2{,}5\,\mathrm{V}$$

Alternativ kann hier auch der Überlagerungssatz angewendet werden.

Octave-Datei: `loesung_06_03.m`

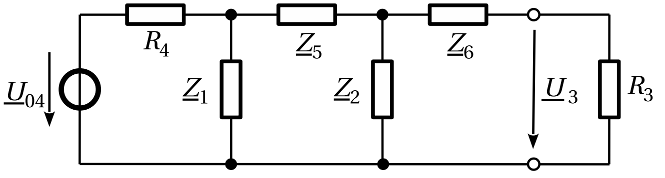
```
% Lösung der Übungsaufgabe 6.3

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
R1  = 1e3;  % Ohm
R2  = 1e3;  % Ohm
R3  = 1e3;  % Ohm
R4  = 1e3;  % Ohm
R5  = 1e3;  % Ohm
R6  = 1e3;  % Ohm
U00 = 5;    % Volt
I00 = 2e-3; % Ampere
disp("Vorgaben");
disp(["  R1  = ",num2str(R1)," Ohm"]);
disp(["  R2  = ",num2str(R2)," Ohm"]);
disp(["  R3  = ",num2str(R3)," Ohm"]);
disp(["  R4  = ",num2str(R4)," Ohm"]);
disp(["  R5  = ",num2str(R5)," Ohm"]);
disp(["  R6  = ",num2str(R6)," Ohm"]);
disp(["  U00 = ",num2str(U00)," V"]);
disp(["  I00 = ",num2str(I00*1e3)," mA"]);
disp(" ");

% Quellenumwandlung
I01 = -U00/R1;
I03 = -U00/R3;

% Knotenpotenzialverfahren
Y = [ ... % Knotenadmittanzmatrix (Knotenleitwertmatrix)
  1/R4+1/R6, 0, -1/R6; ...
  0, 1/R1+1/R2, -1/R1; ...
  -1/R6, -1/R1, 1/R1+1/R3+1/R5+1/R6 ];
I0 = [ ... % Quellstromvektor
  -I00; I00-I01; I01+I03 ];

% Lösung des Gleichungssystems
Uk = (Y^(-1))*I0; % Vektor der unabhängigen Spannungen
U5 = Uk(3); % Spannung über R5
disp("Ergebnis des Knotenpotenzalverfahrens");
disp(["  U5  = ",num2str(U5)," V"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_06_03.m` (Fortsetzung)

```
% Netzliste
net = [ ...
  2,3,1/R1,U00,0;...
  2,0,1/R2,0,0;...
  0,3,1/R3,U00,0;...
  1,0,1/R4,0,0;...
  3,0,1/R5,0,0;...
  3,1,1/R6,0,0;...
  1,2,0,0,I00 ];

% Berechnung aller Zweigspannungen und -ströme
[U,Uz,Iz] = kpv(net);
disp("Spannungen und Ströme im Netzwerk (Auswertung der Netzliste) ");
for i=1:length(Uz)
  disp([" U",num2str(i),"z = ",num2str(Uz(i))," V"]);
endfor
for i=1:length(Iz)
  disp([" I",num2str(i),"z = ",num2str(Iz(i)*1e3)," mA"]);
endfor
disp(" ");
```

Übung 6.4 Ersatzquelle

Für das Netzwerk, bestehend aus der Spannungsquelle $\underline{U}_{04} = 10\,\mathrm{V}$ mit dem Innenwiderstand $R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ und den Impedanzen $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_5 = \underline{Z}_6 = 1\,\mathrm{k\Omega} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}45^\circ}$, soll mittels Knotenpotenzialverfahren eine Ersatzspannungsquelle berechnet werden. Das Netzwerk wird durch den Widerstand $R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ belastet.



a) Nummerieren Sie die Knoten und erstellen Sie eine Netzliste.

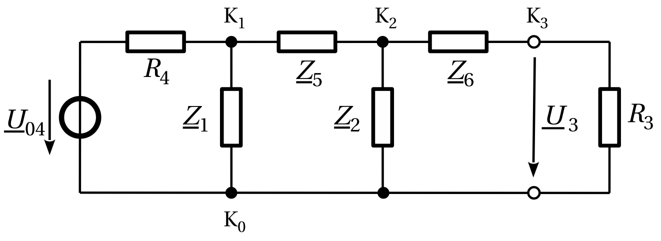
b) Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_3$ und die Leerlaufspannung $\underline{U}_{3\mathrm{L}}$ für $R_3 = \infty$.

c) Bestimmen Sie die Parameter der Ersatzspannungsquelle, also die Quellspannung $\underline{U}_0$ und die Innenimpedanz $\underline{Z}_0$.

d) Nun wird R_3 durch eine ideale Stromquelle mit dem beliebig zu wählenden Quellstrom $\underline{I}_0$ ersetzt und die Spannungsquelle wird ausgeschaltet. Berechnen Sie $\underline{U}_{3I}$ und überprüfen Sie mit diesem Ergebnis die zuvor ermittelte Innenimpedanz $\underline{Z}_0$.

Lösung der Übungsaufgabe 6.4 (Seite 191)

a) Knotennummerierung und Netzliste



Netzliste des Netzwerks

K+	K−	Zweigadmittanz	Quellspannung	Quellstrom
1	0	$1/\underline{Z}_1$	0	0
2	0	$1/\underline{Z}_2$	0	0
3	0	$1/R_3$	0	0
1	0	$1/R_4$	$\underline{U}_{04}$	0
1	2	$1/\underline{Z}_5$	0	0
2	3	$1/\underline{Z}_6$	0	0

b) Spannung $\underline{U}_3$ und Leerlaufspannung $\underline{U}_{3L}$

Zunächst setzen wir die Netzliste in die Matrix-Darstellung von Octave um und berechnen alle Ströme und Spannungen im Netzwerk mit dem Knotenpotenzialverfahren.

```
net = [ ...
  1,0,1/Z1,0,0;...
  2,0,1/Z2,0,0;...
  3,0,1/R3,0,0;...
  1,0,1/R4,U04,0;...
  1,2,1/Z5,0,0;...
  2,3,1/Z6,0,0 ];
[U,Uz,Iz] = kpv(net); % Netzwerkanalyse
```

Hier interessiert uns nur die Spannung $\underline{U}_3$ über dem Widerstand R_3.

$\underline{U}_3 = 0{,}88947\,\mathrm{V}$ ($\underline{U}_3$ ist hier tatsächlich reell.)

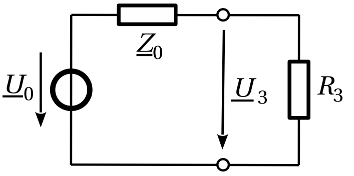
Zur Berechnung der Leerlaufspannung ändern wir das Netzwerk ab, indem wir R_3 entfernen. In der Netzliste wird dazu der Leitwert $1/R_3$ durch null ersetzt. Sodann führen wir die Netzwerkberechnung erneut durch. Nun erhalten wir die Leerlaufspannung

$$\underline{U}_{3L} = (1{,}918 - \mathrm{j}\,0{,}987)\,\mathrm{V}\,,$$

die zugleich der Quellspannung der Ersatzspannungsquelle entspricht.

c) Parameter der Ersatzspannungsquelle

Wir kennen zwei Betriebszustände des Netzwerks und vergleichen diese mit dem elektrischen Verhalten der Ersatzspannungsquelle.



Im Leerlauffall ($R_3 = \infty$) entspricht die Spannung an den Klemmen der bereits ermittelten Spannung $\underline{U}_{3L}$, d. h,

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_{3L} = (1{,}918 - \mathrm{j}\,0{,}987)\ \mathrm{V}\,.$$

Ansonsten ist die Spannung an den Klemmen durch

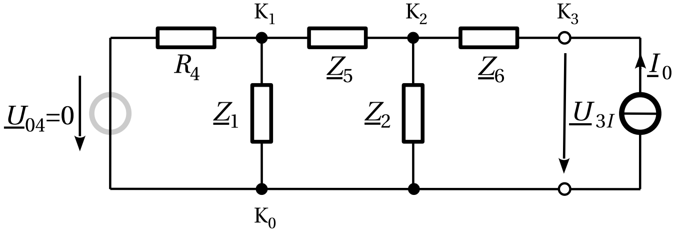
$$\underline{U}_3 = \frac{R_3}{\underline{Z}_0 + R_3}\,\underline{U}_0$$

gegeben. Damit können wir nun die Innenimpedanz bestimmen.

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_0 - \underline{U}_3}{\underline{U}_3}\,R_3 = (1157 - \mathrm{j}\,1110)\ \Omega = 1603\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,43{,}8^\circ}$$

d) Alternative Bestimmung der Innenimpedanz

Wir schalten die Spannungsquelle aus ($\underline{U}_{04} = 0$). Damit ist der Widerstand R_4 direkt mit dem Knoten K_0 verbunden. Wir entfernen auch den Widerstand R_3. In die nun offenen Ausgangsklemmen, d. h. die Knoten K_3 und K_0, speisen wir einen beliebigen Strom[1] ein und ermitteln die Spannung $\underline{U}_{3I}$ an den Klemmen.



Die Netzliste muss zur Beschreibung des veränderten Netzwerks entsprechend angepasst werden.

Netzliste des abgewandelten Netzwerks

K+	K−	Zweigadmittanz	Quellspannung	Quellstrom
1	0	$1/\underline{Z}_1$	0	0
2	0	$1/\underline{Z}_2$	0	0
3	0	0	0	$\underline{I}_0$
1	0	$1/R_4$	0	0
1	2	$1/\underline{Z}_5$	0	0
2	3	$1/\underline{Z}_6$	0	0

Mit dieser Netzliste führen wir eine neue Netzwerkberechnung durch. Bei der willkürlichen Festlegung $\underline{I}_0 = 1\ \mathrm{A}$ erhalten wir die Spannung

$$\underline{U}_{3I} = (1156{,}6 - \mathrm{j}\,1110)\ \mathrm{V} = 1603\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}43{,}8^\circ}\ .$$

Das ist lediglich ein theoretischer Wert ohne praktische Relevanz. Der Quotient von Spannung und Strom allerdings ist die tatsächliche Innenimpedanz des Netzwerks.

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_{3I}}{\underline{I}_0} = \frac{1603\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}43{,}8^\circ}}{1\ \mathrm{A}} = 1603\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}43{,}8^\circ}$$

[1] Das Verfahren kann auch praktisch angewendet werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dass der Strom in einem Bereich liegt, der nicht zu einer Schädigung der Bauelemente führt.

Octave-Datei: `loesung_06_04.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 6.4

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
Z1 = 1000*exp(-j*45*pi/180); % Ohm
Z2 = 1000*exp(-j*45*pi/180); % Ohm
R3 = 1000; % Ohm
R4 = 1000; % Ohm
Z5 = 1000*exp(-j*45*pi/180); % Ohm
Z6 = 1000*exp(-j*45*pi/180); % Ohm
U04 = 10; % Volt
disp("Vorgaben");
disp(["  |Z1|     = ",num2str(abs(Z1))," Ohm"]);
disp(["  arg(Z1)  = ",num2str(angle(Z1)*180/pi),"°"]);
disp(["  |Z2|     = ",num2str(abs(Z2))," Ohm"]);
disp(["  arg(Z2)  = ",num2str(angle(Z2)*180/pi),"°"]);
disp(["  R3       =  ",num2str(R3)," Ohm"]);
disp(["  R4       = ",num2str(R4)," Ohm"]);
disp(["  |Z5|     = ",num2str(abs(Z5))," Ohm"]);
disp(["  arg(Z5)  = ",num2str(angle(Z5)*180/pi),"°"]);
disp(["  |Z6|     = ",num2str(abs(Z6))," Ohm"]);
disp(["  arg(Z6)  = ",num2str(angle(Z6)*180/pi),"°"]);
disp(["  |U04|    = ",num2str(abs(U04))," V"]);
disp(["  arg(U04) = ",num2str(angle(U04)*180/pi),"°"]);
disp(" ");

% Spannung U3 bei Belastung durch R3
net = [ ...
  1,0,1/Z1,0,0;...
  2,0,1/Z2,0,0;...
  3,0,1/R3,0,0;...
  1,0,1/R4,U04,0;...
  1,2,1/Z5,0,0;...
  2,3,1/Z6,0,0 ];

% Berechnung von U3
[U,Uz,Iz] = kpv(net);
U3 = U(3);
disp("Spannung an den Klemmen bei Belastung")
disp([" U3  = (",num2str(U3),") V"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_06_04.m` (Fortsetzung)

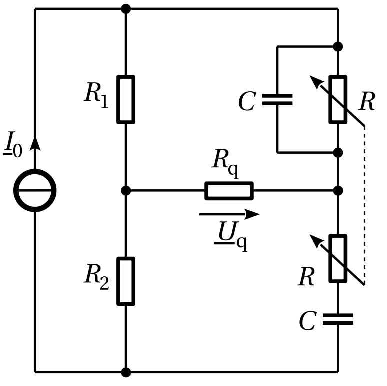
```
% Spannung U3 bei Leerlauf (R3 = Inf bzw. 1/R3 = 0)
net = [ ...
  1,0,1/Z1,0,0;...
  2,0,1/Z2,0,0;...
  3,0,0,0,0;...
  1,0,1/R4,U04,0;...
  1,2,1/Z5,0,0;...
  2,3,1/Z6,0,0 ];

% Berechnung von U3
[U,Uz,Iz] = kpv(net);
U3L = U(3);
disp("Leerlaufspannung an den Klemmen")
disp([" U3L = (",num2str(U3L),") V"]);
disp(" ");

% Berechnung von Quellspannung und Innenimpedanz
Z0 = R3*(U3L/U3-1);
U0 = U3L;
disp("Parameter der Ersatzquelle")
disp([" U0  = (",num2str(U0),") V"]);
disp([" Z0  = (",num2str(Z0),") Ohm"]);
disp(" ");
```

Octave-Datei: `loesung_06_05.m` (Fortsetzung)

```
% Spannung U3 bei Speisung mit I0 (U04 = 0, R3 = Inf)
I0 = 1; % beliebiger Wert
net = [ ...
  1,0,1/Z1,0,0;...
  2,0,1/Z2,0,0;...
  0,3,0,0,I0;...
  1,0,1/R4,0,0;...
  1,2,1/Z5,0,0;...
  2,3,1/Z6,0,0 ];

% Berechnung von U3
[U,Uz,Iz] = kpv(net);
U3I = U(3);
disp("Spannung an den Klemmen bei Einspeisung von I0")
disp([" I0  = ",num2str(I0)," A  (willkürliche Festlegung)"]);
disp([" U3I = (",num2str(U3L),") V"]);
disp(" ");

% Berechnung der Innenimpedanz
Z0I = U3I/I0;
disp("Parameter der Ersatzquelle (alternative Berechnung")
disp([" U0  = (",num2str(U0),") V"]);
disp([" Z0I = (",num2str(Z0I),") Ohm"]);
disp(" ");
```

Übung 6.5 Wien-Robinson-Brücke

Die im Bild dargestellte Brückenschaltung soll mit dem Knotenpotenzialverfahren analysiert werden. Die Schaltung wird durch eine ideale Stromquelle mit $\underline{I}_0 = 10\,\text{mA}$ gespeist. Der Widerstand R_2 ist durch $R_2 = 2R_1 = 1\,\text{k}\Omega$ gegeben. Der Widerstand im Querzweig der Brücke beträgt $R_\text{q} = 500\,\Omega$. Der Abgleich der Brücke ist frequenzabhängig und erfolgt durch Variation des Doppelpotenziometers R.



Die Frequenz der Stromquelle beträgt $f = 1\,\text{kHz}$. Das Potenziometer ist auf den Wert $R = 1592\,\Omega$ eingestellt und außerdem ist $C = 100\,\text{nF}$. Im Folgenden wird zum einen die Frequenz und zum anderen die Einstellung des Potenziometers variiert.

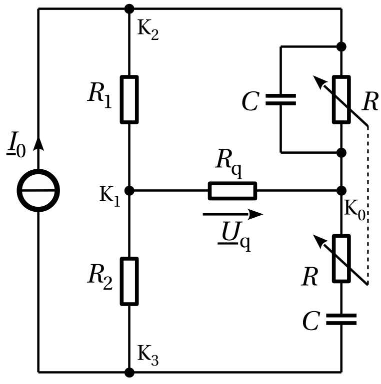
a) Nummerieren Sie die Knoten und erstellen Sie eine Netzliste.

b) Die Frequenz der Stromquelle wird im Bereich $0 \le f \le 2\,\text{kHz}$ variiert. Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_\text{q}$ und tragen Sie $|\underline{U}_\text{q}|$ über der Frequenz auf.

c) Das Doppelpotenziometer wird im Bereich $0 \le R \le 2\,\text{k}\Omega$ variiert. Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_\text{q}$ und tragen Sie $|\underline{U}_\text{q}|$ über dem Widerstand auf.

Lösung der Übungsaufgabe 6.5 (Seite 192)

a) Knotennummerierung und Netzliste



Netzliste des Netzwerks

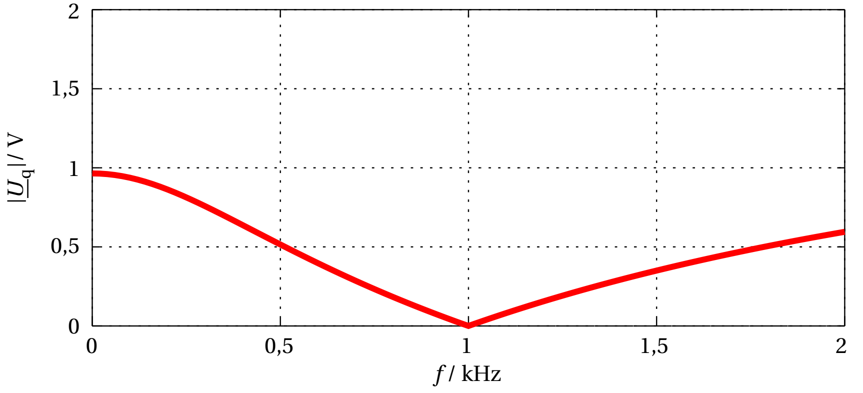
K+	K−	Zweigadmittanz	Quellspannung	Quellstrom
1	0	$1/R_q$	0	0
2	0	$1/R + j\omega C$	0	0
3	0	$j\omega C/(1 + j\omega RC)$	0	0
2	1	$1/R_1$	0	0
1	3	$1/R_2$	0	0
3	2	0	0	$\underline{I}_0$

Hier wurden die Reihenschaltung sowie die Parallelschaltung des Widerstands R und der Kapazität C jeweils zu einem Zweipol zusammengefasst. Ein derartiges Vorgehen hatten wir ursprünglich ausgeschlossen, um alle Ströme und Spannungen im Netzwerk zu berechnen. Da wir uns hier nicht für Teilspannungen und Teilströme im rechten Brückenzweig interessieren, bietet sich diese Vorgehensweise aber an.

b) Variation der Frequenz

Die Frequenz wird Bereich $0 \le f \le 2$ kHz variiert und für jeden Frequenzstützpunkt wird eine komplette Netzwerkanalyse durchgeführt. Bei jedem Schleifendurchlauf müssen die Elemente der Knotenadmittanzmatrix, d. h. die Admittanzen in der Netzliste, neu berechnet werden.

Betrag der Spannung im Querzweig über der Frequenz



Das Doppelpotenziometer ist auf den Wert $R = 1592\,\Omega$ eingestellt. Die Brücke ist bei der Frequenz

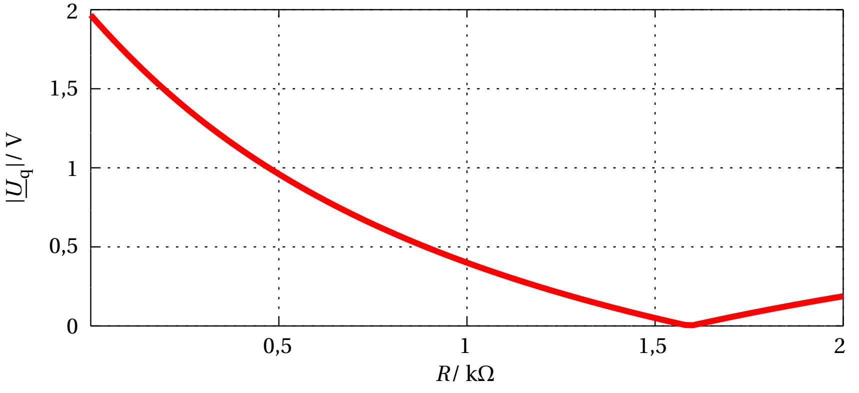
$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 1592\,\Omega \cdot 100\,\text{nF}} = 1\,\text{kHz}$$

abgeglichen. Die Spannung $\underline{U}_q$ im Querzweig der Brücke verschwindet bei dieser Frequenz.

c) Variation des Widerstands

Das Doppelpotenziometer wird im Bereich $0 \leq R \leq 2\,\mathrm{k\Omega}$ variiert und für jeden Frequenzstützpunkt wird eine komplette Netzwerkanalyse durchgeführt. Bei jedem Schleifendurchlauf müssen die Elemente der Knotenadmittanzmatrix, d. h. die Admittanzen in der Netzliste, neu berechnet werden.

Betrag der Spannung im Querzweig über der Potenziometereinstellung



Die Frequenz ist auf den Wert $f = 1\,\mathrm{kHz}$ eingestellt. Die Brücke ist bei der Einstellung des Doppelpoteziometers auf den Wert

$$R_0 = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1\,\mathrm{kHz} \cdot 100\,\mathrm{nF}} = 1592\,\Omega$$

abgeglichen. Die Spannung $\underline{U}_\mathrm{q}$ im Querzweig der Brücke verschwindet bei dieser Einstellung.

Octave-Datei: `loesung_06_05.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 6.5

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
f0 = 1000;          % Hertz
R0 = 1592;          % Ohm
C  = 100e-9;        % Farad
R1 = 500;           % Ohm
R2 = 1000;          % Ohm
Rq = 500;           % Ohm
I0 = 0.01;          % Ampere
disp("Vorgaben");
disp(["  f0      = ",num2str(f0*1e-3)," kHz"]);
disp(["  R0      = ",num2str(R0)," Ohm"]);
disp(["  C       = ",num2str(C*1e9)," nF"]);
disp(["  R1      = ",num2str(R1)," Ohm"]);
disp(["  R2      = ",num2str(R2)," Ohm"]);
disp(["  I0      = ",num2str(I0*1e3)," mA"]);
disp(" ");

% Darstellungsbereich
fmin = 0;           % Hertz
fmax = 2000;        % Hertz
Rmin = eps;         % Endlicher Leitwert!
Rmax = 2000;        % Ohm
Umin = 0;           % Volt
Umax = 2;           % Volt

% Variation von Frequenz und Widerstand
K = 101; k = 0:K-1; % Stützpunkte
f = fmin+k*(fmax-fmin)/(K-1); % Frequenz
R = Rmin+k*(Rmax-Rmin)/(K-1); % Widerstand
```

Octave-Datei: `loesung_06_05.m` (Fortsetzung)

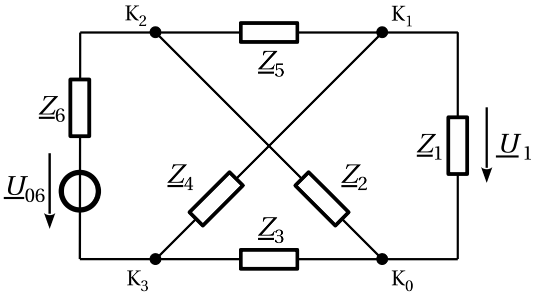
```
% Variation der Frequenz
Uqf = zeros(K,1);
for k = 1:K
  w = 2*pi*f(k);

  net = [ ...
    1,0,1/Rq,0,0;...
    2,0,1/R0+j*w*C,0,0;...
    3,0,j*w*C/(1+j*w*R0*C),0,0;...
    2,1,1/R1,0,0;...
    1,3,1/R2,0,0;...
    3,2,0,0,I0 ];

  % Berechnung der Knotenpotenziale sowie aller Spannungen und Ströme
  [U,Uz,Iz] = kpv(net);

  % Berechnung der Übertragungsfunktion
  Uqf(k) = U(1);
endfor

% Variation der Potenziometereinstellung
Uqr = zeros(K,1);
w = 2*pi*f0;
for k = 1:K
  net = [ ...
    1,0,1/Rq,0,0;...
    2,0,1/R(k)+j*w*C,0,0;...
    3,0,j*w*C/(1+j*w*R(k)*C),0,0;...
    2,1,1/R1,0,0;...
    1,3,1/R2,0,0;...
    3,2,0,0,I0 ];

  % Berechnung der Knotenpotenziale sowie aller Spannungen und Ströme
  [U,Uz,Iz] = kpv(net);

  % Berechnung der Übertragungsfunktion
  Uqr(k) = U(1);
endfor
```

Octave-Datei: `loesung_06_05.m` (Fortsetzung)

```
% Darstellung der Spannung über der Frequenz
hFig1 = figure("Name","Spannung im Querzweig über der Frequenz");
hPlot1 = plot(f*1e-3,abs(Uqf),"r");
grid on;
axis([fmin*1e-3,fmax*1e-3,Umin,Umax]);
title("\\bf Betrag der Spannung im Querzweig","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("|Uq| / V","FontSize",12);

% Darstellung der Spannung über der Potenziometereinstellung
hFig2 = figure("Name",...
              "Spannung im Querzweig über der Potenziometereinstellung");
hPlot2 = plot(R*1e-3,abs(Uqr),"r");
grid on;
axis([Rmin*1e-3,Rmax*1e-3,Umin,Umax]);
title("\\bf Betrag der Spannung im Querzweig","FontSize",14);
xlabel("R / k\\Omega","FontSize",12);
ylabel("|Uq| / V","FontSize",12);
```

Übung 6.6 Analyse eines Wechselstromnetzwerks

Die Spannung $\underline{U}_1$ im dargestellten Netzwerk soll mit dem Knotenpotenzialverfahren berechnet werden. Der Knoten K_0 ist als Sternpunkt vorgegeben. Die unabhängigen Spannungen fallen über den Impedanzen $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$ ab.



$\underline{U}_{06} = 10\,\text{V}$
$\underline{Z}_1 = 1\,\text{k}\Omega$
$\underline{Z}_2 = 1\,\text{k}\Omega \cdot e^{-j45°}$
$\underline{Z}_3 = 1\,\text{k}\Omega \cdot e^{+j45°}$
$\underline{Z}_4 = 1\,\text{k}\Omega \cdot e^{-j45°}$
$\underline{Z}_5 = 1\,\text{k}\Omega \cdot e^{-j45°}$
$\underline{Z}_6 = 1\,\text{k}\Omega$

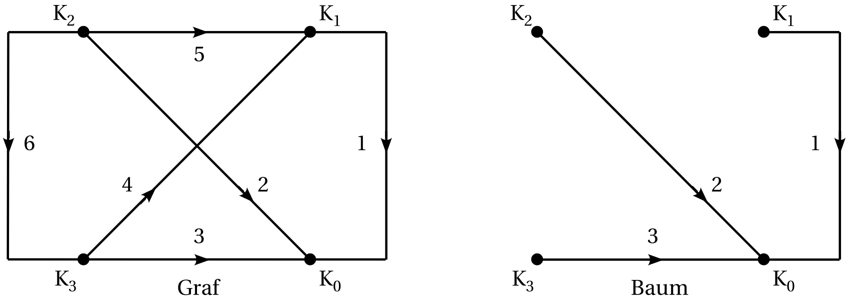
a) Skizzieren Sie den Grafen und den Baum. Geben Sie die Anzahl der Knoten k und die Anzahl der Zweige z an.

b) Stellen Sie das Gleichungssystem für die unabhängigen Spannungen auf.

c) Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_1$.

Lösung der Übungsaufgabe 6.6 (Seite 192)

a) Graf und Baum



Anzahl der Knoten: $k = 4$
Anzahl der Zweige: $z = 6$

b) Gleichungssystem der unabhängigen Spannungen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_4}+\frac{1}{\underline{Z}_5} & -\frac{1}{\underline{Z}_5} & -\frac{1}{\underline{Z}_4} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_5} & \frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_5}+\frac{1}{\underline{Z}_6} & -\frac{1}{\underline{Z}_6} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_4} & -\frac{1}{\underline{Z}_6} & \frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_4}+\frac{1}{\underline{Z}_6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\underline{U}_{06}}{\underline{Z}_6} \\ -\frac{\underline{U}_{06}}{\underline{Z}_6} \end{pmatrix}$$

c) Berechnung der Spannung $\underline{U}_1$

Wir erstellen zunächst die Netzliste und setzen diese in die Matrix-Darstellung von Octave um. Anschließend berechnen wir alle Spannungen und Ströme im Netzwerk mit dem Knotenpotenzialverfahren.

Netzliste des Netzwerks

K+	K−	Zweigadmittanz	Quellspannung	Quellstrom
1	0	$1/\underline{Z}_1$	0	0
2	0	$1/\underline{Z}_2$	0	0
3	0	$1/\underline{Z}_3$	0	0
3	1	$1/\underline{Z}_4$	0	0
2	1	$1/\underline{Z}_5$	0	0
2	3	$1/\underline{Z}_6$	$\underline{U}_{06}$	0

Hier interessiert uns nur die Spannung $\underline{U}_1$ über der Impedanz $\underline{Z}_1$.

$$\underline{U}_1 = 1{,}213\,\text{V} \cdot e^{-j90^\circ}$$

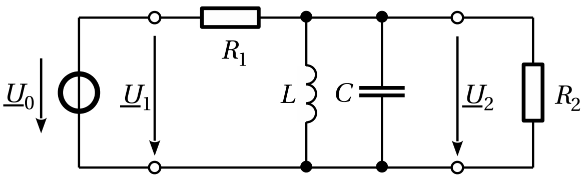
Die Spannung $\underline{U}_1$ ist hier rein imaginär, d. h. um -90° gegenüber der Eingangsspannung $\underline{U}_{06}$ phasenverschoben.

Octave-Datei: loesung_06_06.m

```
% Lösung der Übungsaufgabe 6.6

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
Z1  = 1000;                   % Ohm
Z2  = 1000*exp(-j*45*pi/180); % Ohm
Z3  = 1000*exp(j*45*pi/180);  % Ohm
Z4  = 1000*exp(-j*45*pi/180); % Ohm
Z5  = 1000*exp(-j*45*pi/180); % Ohm
Z6  = 1000;                   % Ohm
U06 = 10;                     % Volt
disp("Vorgaben");
disp(["  |Z1|     = ",num2str(abs(Z1))," Ohm"]);
disp(["  arg(Z1)  = ",num2str(angle(Z1)*180/pi),"°"]);
disp(["  |Z2|     = ",num2str(abs(Z2))," Ohm"]);
disp(["  arg(Z2)  = ",num2str(angle(Z2)*180/pi),"°"]);
disp(["  |Z3|     = ",num2str(abs(Z3))," Ohm"]);
disp(["  arg(Z3)  = ",num2str(angle(Z3)*180/pi),"°"]);
disp(["  |Z4|     = ",num2str(abs(Z4))," Ohm"]);
disp(["  arg(Z4)  = ",num2str(angle(Z4)*180/pi),"°"]);
disp(["  |Z5|     = ",num2str(abs(Z5))," Ohm"]);
disp(["  arg(Z5)  = ",num2str(angle(Z5)*180/pi),"°"]);
disp(["  |Z6|     = ",num2str(abs(Z6))," Ohm"]);
disp(["  arg(Z6)  = ",num2str(angle(Z6)*180/pi),"°"]);
disp(["  |U06|    = ",num2str(abs(U06))," V"]);
disp(["  arg(U06) = ",num2str(angle(U06)*180/pi),"°"]);
disp(" ");

% Netzliste
net = [ ...
  1,0,1/Z1,0,0;...
  2,0,1/Z2,0,0;...
  3,0,1/Z3,0,0;...
  3,1,1/Z4,0,0;...
  2,1,1/Z5,0,0;...
  2,3,1/Z6,U06,0 ];

% Berechnung von U1
[U,Uz,Iz] = kpv(net);
U1 = U(1);
disp("Spannung über der Impedanz Z1")
disp(["    U1     = (",num2str(U1),") V"]);
disp(["   |U1|    = ",num2str(abs(U1))," V"]);
disp(["  arg(U1) = ",num2str(angle(U1)*180/pi),"°"]);
disp(" ");
```

Übung 6.7 Bandpassfilter

Die Übertragungsfunktion $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \underline{U}_2(\mathrm{j}\omega)/\underline{U}_1(\mathrm{j}\omega)$ des im Bild dargestellten Bandpassfilters (vgl. Übung 4.4) soll mit dem Knotenpotenzialverfahren berechnet werden. Beachten Sie dabei die ideale Spannungsquelle an den Eingangsklemmen.



$\underline{U}_0 = 10\,\mathrm{V}$
$R_1 = 30\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 30\,\mathrm{k\Omega}$
$C = 5\,\mathrm{nF}$
$L = 1\,\mathrm{H}$

a) Wie viele Knoten besitzt das Netzwerk?

b) Wie viele unabhängige Spannungen treten auf?

c) Ist $\underline{U}_1$ eine unabhängige Spannung?

d) Nummerieren Sie die Knoten und erstellen Sie eine Netzliste.

Definieren Sie für die folgenden Aufgabenpunkte geeignete Frequenzstützstellen und wenden Sie für jede Stützstelle das Knotenpotenzialverfahren an.

e) Stellen Sie Dämpfung und Phase im Frequenzbereich $0 \le f \le 10\,\mathrm{kHz}$ dar.

f) Stellen Sie das Bode-Diagramm im Frequenzbereich $1\,\mathrm{Hz} \le f \le 100\,\mathrm{kHz}$ dar.

g) Stellen Sie das Nyquist-Diagramm dar.

Lösung der Übungsaufgabe 6.7 (Seite 193)

a) Anzahl der Knoten

Das Netzwerk enthält $k = 2$ Knoten. Dabei werden die Spannungsquelle $\underline{U}_0$ und der Widerstand R_1 zu einem Zweipol zusammengefasst.

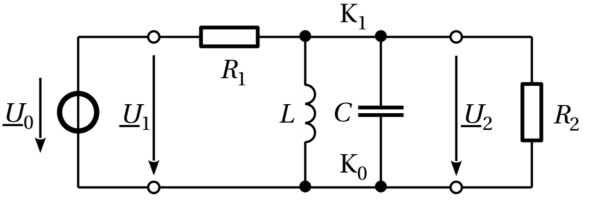
b) Anzahl der unabhängigen Spannungen

Nur die Spannung $\underline{U}_2$ ist unabhängig.

c) Spannung $\underline{U}_1$

Die Spannung $\underline{U}_1$ ist identisch mit der Quellspannung $\underline{U}_0$ (ideale Spannungsquelle), d. h., $\underline{U}_1$ kann keine unabhängige Spannung sein.

d) Knotennummerierung und Netzliste



Netzliste des Netzwerks

K+	K−	Zweigadmittanz	Quellspannung	Quellstrom
1	0	$1/R_1$	$\underline{U}_0$	0
1	0	$1/R_2$	0	0
1	0	$1/(\mathrm{j}\omega L)$	0	0
1	0	$\mathrm{j}\omega C$	0	0

Bei der Zweignummerierung verwenden wir immer die Zweignummer 1 für den Eingang (reale Spannungsquelle mit Widerstand R_1) und die Zweignummer 2 für den Ausgang (Widerstand R_2), d. h., diese beiden Zweipole sind die beiden ersten Einträge in der Netzliste. Damit können wir, unabhängig vom konkreten Netzwerk, immer auf die selbe Weise auf die Eingangs- und auf die Ausgangsspannung zugreifen.

Hier sind nur zwei Knoten vorhanden. Damit besteht das Gleichungssystem lediglich aus einer einzigen Gleichung.

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_0}{R_1}$$

$$\underline{U}_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} \cdot \frac{\underline{U}_0}{R_1}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega R_2 L}{R_1 R_2 (1 - \omega^2 LC) + \mathrm{j}\omega (R_1 + R_2) L} \cdot \underline{U}_0$$

Mit $\underline{U}_1 = \underline{U}_0$ kann auch sofort die Übertragungsfunktion angegeben werden.

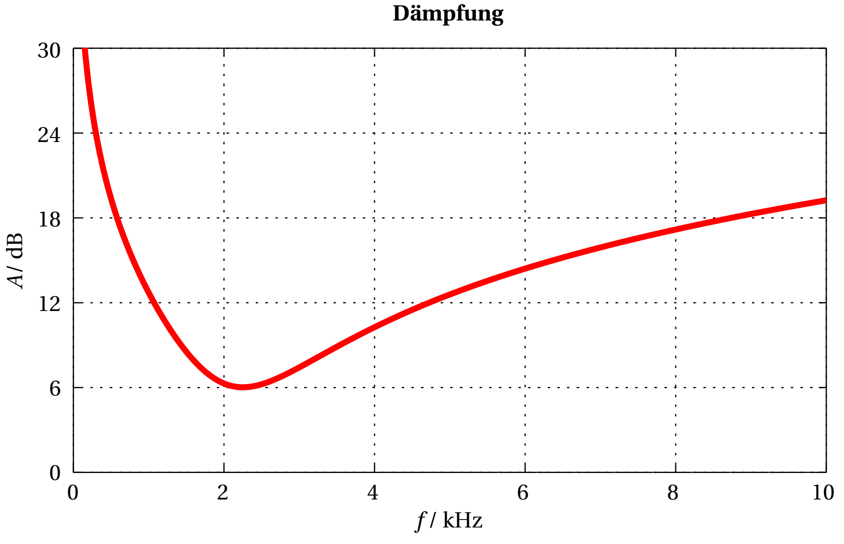
$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2(\mathrm{j}\omega)}{\underline{U}_1(\mathrm{j}\omega)} = \frac{\mathrm{j}\omega R_2 L}{R_1 R_2 (1 - \omega^2 LC) + \mathrm{j}\omega (R_1 + R_2) L}$$

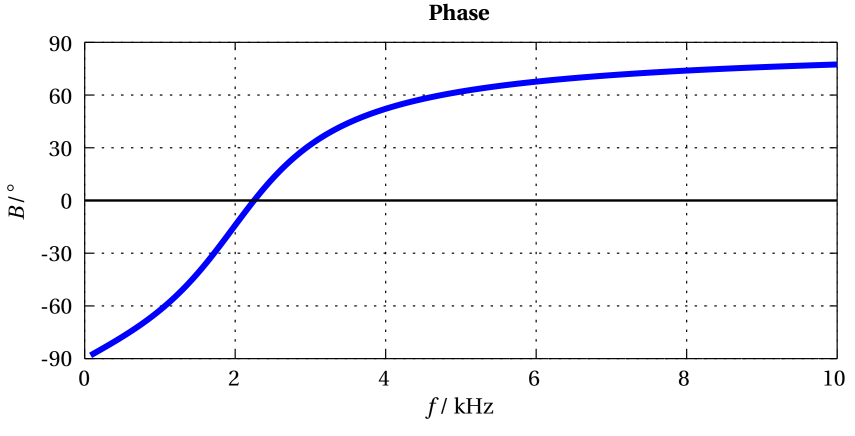
Man vergleiche diesen Lösungsweg mit der Lösung der Aufgabe 4.4.

e) Dämpfung und Phase

Wir wollen hier nicht die Übertragungsfunktion aus Aufgabenpunkt d) unmittelbar auswerten, sondern das Knotenpotenzialverfahren für jeden einzelnen Frequenzpunkt berechnen. In Octave realisieren wir dies, indem wir in einer Schleife die Netzliste mit den jeweiligen (frequenzabhängigen) Admittanzen neu erstellen. Die Netzwerkanalyse liefert uns dann den Wert der Übertragungsfunktion bei der betrachteten Frequenz.

$$A(\omega) = -20\lg\left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right|$$
$$B(\omega) = -\arg\left\{\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right\}$$

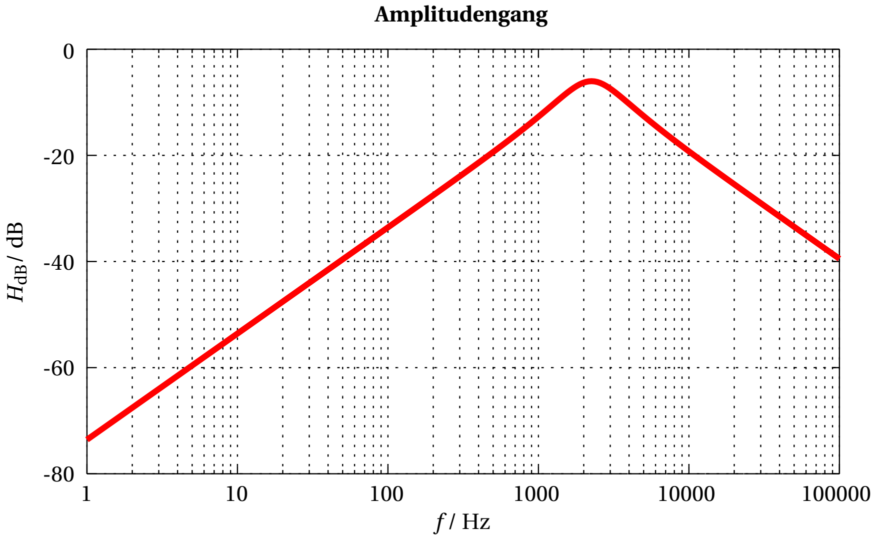


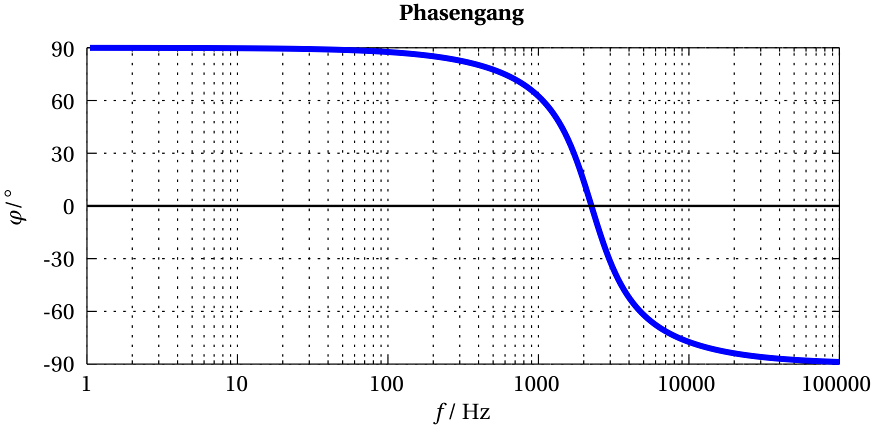


f) Bode-Diagramm

Die Vorgehensweise unterscheidet sich vom Aufgabenpunkt e) lediglich in der Wahl der Frequenzstützpunkte, die hier logarithmisch erfolgt.

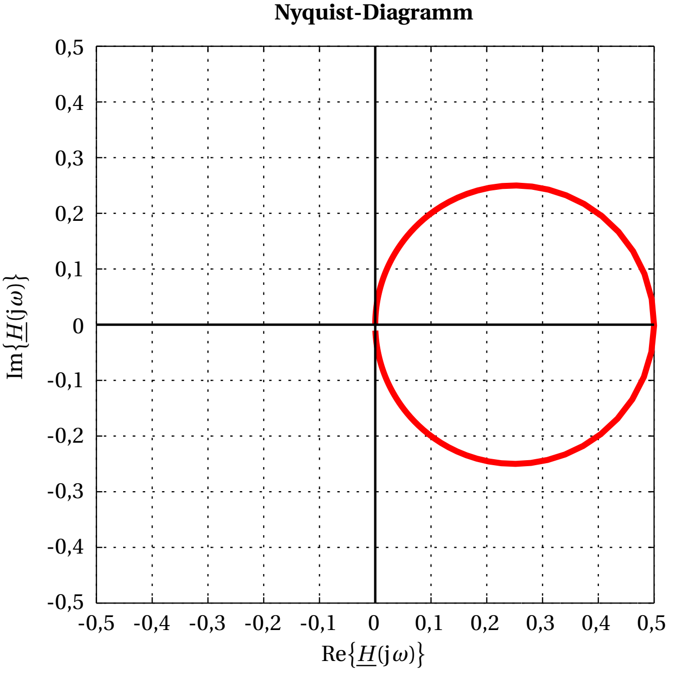
$$H_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20 \lg \left| \underline{H}(\mathrm{j}\omega) \right|$$
$$\varphi(\omega) = \arg \left\{ \underline{H}(\mathrm{j}\omega) \right\}$$





g) Nyquist-Diagramm

Auch hier erfolgt die Wahl der Frequenzstützpunkte logarithmisch.



Octave-Datei: `loesung_06_07.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 6.7

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
U0 = 10;      % Volt
R1 = 30e3;    % Ohm
R2 = 30e3;    % Ohm
C  = 5e-9;    % F
L  = 1;       % H
disp("Vorgaben");
disp(["   |U0|    = ",num2str(abs(U0))," V"]);
disp(["   arg(U0) = ",num2str(angle(U0)*180/pi),"°"]);
disp(["   R1      = ",num2str(R1*1e-3)," kOhm"]);
disp(["   R2      = ",num2str(R2*1e-3)," kOhm"]);
disp(["   C       = ",num2str(C*1e9)," nF"]);
disp(["   L       = ",num2str(L)," H"]);
disp(" ");

% Frequenzachse und Frequenzstützstellen
N = 256;
n = 0:N-1;

% Frequenzachse mit äquidistanten Frequenzstützstellen
fmin = 0;      % Hz
fmax = 10e3;   % Hz
f = fmin+n*(fmax-fmin)/(N-1);

% Aufbau des Vektors der Übertragungsfunktion
H = zeros(N,1);

% Netzwerkanalyse für jeden Frequenzstützpunkt
for k=1:N
  % Aktuelle Frequenz
  w = 2*pi*f(k);

  % Netzliste
  net = [ ...
    1,0,1/R1,U0,0;...
    1,0,1/R2,0,0;...
    1,0,1/(j*w*L),0,0;...
    1,0,j*w*C,0,0 ];

  % Berechnung der Knotenpotenziale sowie aller Spannungen und Ströme
  [U,Uz,Iz] = kpv(net);

  % Berechnung der Übertragungsfunktion
  H(k) = Uz(2)/U0;
endfor;
```

Octave-Datei: `loesung_06_07.m` (Fortsetzung)

```
% Dämpfung und Phase
A = -20*log10(abs(H));
B = -angle(H)*180/pi;
B(find(abs(H)==min(abs(H)))) = NaN; % Keine Phase, wenn H=0!

% Darstellungsgrenzen der Diagramme (Ordinate)
Amin   = 0;    % dB
Amax   = 30;   % dB
Bmin   = -90;   % Grad
Bmax   = 90;   % Grad

% Darstellung der Dämpfung
hFig1 = figure("Name","Dämpfung");
hPlot1 = plot(f*1e-3,A,"r");
axis([fmin*1e-3,fmax*1e-3,Amin,Amax]);
grid on;
title("\\bf Dämpfung","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("A / dB","FontSize",12);

% Darstellung der Phase
hFig2 = figure("Name","Phase");
hPlot2 = plot(f*1e-3,B,"b");
axis([fmin*1e-3,fmax*1e-3,Bmin,Bmax]);
grid on;
title("\\bf Phase","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("B / °","FontSize",12);

% Frequenzachse mit logarithmisch angeordneten Frequenzstützstellen
fmin = 1;      % Hz
fmax = 100e3;  % Hz
f = 10.^(log10(fmin)+n*(log10(fmax)-log10(fmin))/(N-1));

% Aufbau des Vektors der Übertragungsfunktion
H = zeros(N,1);
```

Octave-Datei: `loesung_06_07.m` (Fortsetzung)

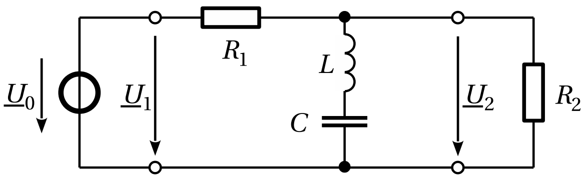
```
% Netzwerkanalyse für jeden Frequenzstützpunkt
for k=1:N
  % Aktuelle Frequenz
  w = 2*pi*f(k);

  % Netzliste
  net = [ ...
    1,0,1/R1,U0,0;...
    1,0,1/R2,0,0;...
    1,0,1/(j*w*L),0,0;...
    1,0,j*w*C,0,0 ];

  % Berechnung der Knotenpotenziale sowie aller Spannungen und Ströme
  [U,Uz,Iz] = kpv(net);

  % Berechnung der Übertragungsfunktion
  H(k) = Uz(2)/U0;
endfor;

% Übertragungsfunktion, Amplituden und Phasengang (Bode-Diagramm)
HdB = 20*log10(abs(H));
phi = angle(H)*180/pi;
phi(find(abs(H)==min(abs(H)))) = NaN; % Keine Phase, wenn H=0!

% Darstellungsgrenzen Bode-Diagramm
HdBmax = 0;     % dB
HdBmin = -80;   % dB
phimax = 90;    % Grad
phimin = -90;   % Grad

% Darstellung des Amplitudengangs
hFig3 = figure("Name","Amplitudengang");
hPlot3 = semilogx(f,HdB,"r");
axis([fmin,fmax,HdBmin,HdBmax]);
grid on;
title("\\bf Amplitudengang","FontSize",14);
xlabel("f / Hz","FontSize",12);
ylabel("20lg|H| / dB","FontSize",12);

% Darstellung des Phasengangs
hFig4 = figure("Name","Phasengang");
hPlot4 = semilogx(f,phi,"b");
axis([fmin,fmax,phimin,phimax]);
grid on;
title("\\bf Phasengang","FontSize",14);
xlabel("f / Hz","FontSize",12);
ylabel("arg\\{H\\} / °","FontSize",12);
```

Octave-Datei: `loesung_06_07.m` (Fortsetzung)

```
% Darstellungsgrenzen Nyquist-Diagramm
Xmin   = -0.5;
Xmax   = 0.5;
Ymin   = -0.5;
Ymax   = 0.5;

% Darstellung des Nyquist-Diagramms
hFig5 = figure("Name","Nyquist-Diagramm");
hPlot5 = plot(real(H),imag(H),"r");
axis([Xmin,Xmax,Ymin,Ymax]);
axis square;
grid on;
title("\\bf Nyquist-Diagramm","FontSize",14);
xlabel("Re\\{H\\}","FontSize",12);
ylabel("Im\\{H\\}","FontSize",12);
```

Übung 6.8 Bandsperrfilter

Die Übertragungsfunktion $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \underline{U}_2(\mathrm{j}\omega)/\underline{U}_1(\mathrm{j}\omega)$ des im Bild dargestellten Bandsperrfilters (vgl. Übung 4.5) soll mit dem Knotenpotenzialverfahren berechnet werden. Beachten Sie dabei die ideale Spannungsquelle an den Eingangsklemmen.



$\underline{U}_0 = 10\,\mathrm{V}$
$R_1 = 30\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 30\,\mathrm{k\Omega}$
$C = 5\,\mathrm{nF}$
$L = 1\,\mathrm{H}$

a) Wie viele Knoten besitzt das Netzwerk?

b) Wie viele unabhängige Spannungen treten auf?

c) Ist $\underline{U}_1$ eine unabhängige Spannung?

d) Nummerieren Sie die Knoten und erstellen Sie eine Netzliste.

Definieren Sie für die folgenden Aufgabenpunkte geeignete Frequenzstützstellen und wenden Sie für jede Stützstelle das Knotenpotenzialverfahren an.

e) Stellen Sie Dämpfung und Phase im Frequenzbereich $0 \le f \le 10\,\mathrm{kHz}$ dar.

f) Stellen Sie das Bode-Diagramm im Frequenzbereich $1\,\mathrm{Hz} \le f \le 100\,\mathrm{kHz}$ dar.

g) Stellen Sie das Nyquist-Diagramm dar.

Lösung der Übungsaufgabe 6.8 (Seite 193)

a) Anzahl der Knoten

Das Netzwerk enthält $k = 3$ Knoten. Dabei werden die Spannungsquelle $\underline{U}_0$ und der Widerstand R_1 zu einem Zweipol zusammengefasst.

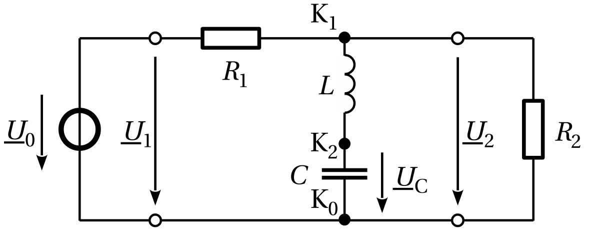
b) Anzahl der unabhängigen Spannungen

Die Spannung $\underline{U}_2$ und die Spannung $\underline{U}_C$ über der Kapazität sind unabhängig.

c) Spannung $\underline{U}_1$

Die Spannung $\underline{U}_1$ ist identisch mit der Quellspannung $\underline{U}_0$ (ideale Spannungsquelle), d. h., $\underline{U}_1$ kann keine unabhängige Spannung sein.

d) Knotennummerierung und Netzliste



Netzliste des Netzwerks

K+	K−	Zweigadmittanz	Quellspannung	Quellstrom
1	0	$1/R_1$	$\underline{U}_0$	0
1	0	$1/R_2$	0	0
1	2	$1/(\mathrm{j}\omega L)$	0	0
2	0	$\mathrm{j}\omega C$	0	0

Bei der Zweignummerierung verwenden wir immer die Zweignummer 1 für den Eingang (reale Spannungsquelle mit Widerstand R_1) und die Zweignummer 2 für den Ausgang (Widerstand R_2), d. h., diese beiden Zweipole sind die beiden ersten Einträge in der Netzliste. Damit können wir, unabhängig vom konkreten Netzwerk, immer auf die selbe Weise auf die Eingangs- und auf die Ausgangsspannung zugreifen.

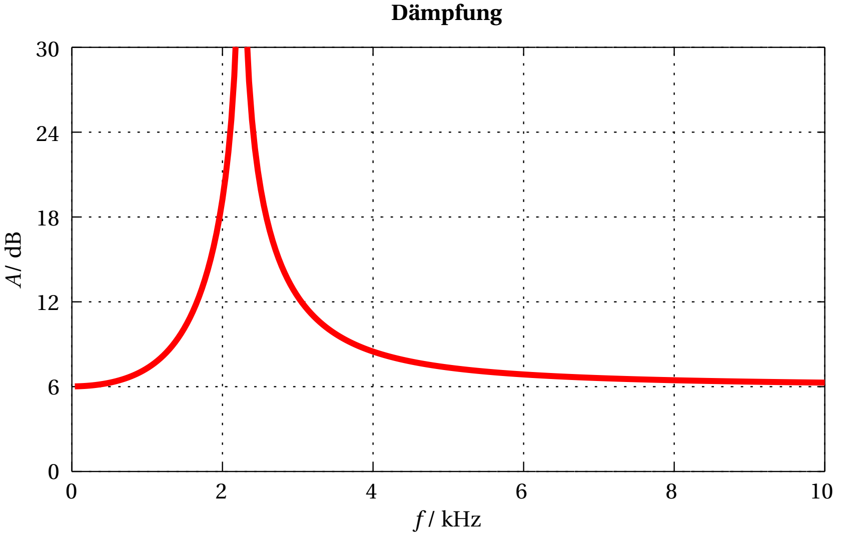
Ein Vergleich mit der Aufgabe 6.8 zeigt, dass hier die Netzliste lediglich geringfügig abgeändert werden muss. Die Änderung bezieht sich auf die Knotenzuordnung in den letzten beiden Zeilen. Da die Ausgangsspannung nach wie vor über dem Zweig 2 abfällt, ist keine weitere Änderung in der Octave-Datei erforderlich.

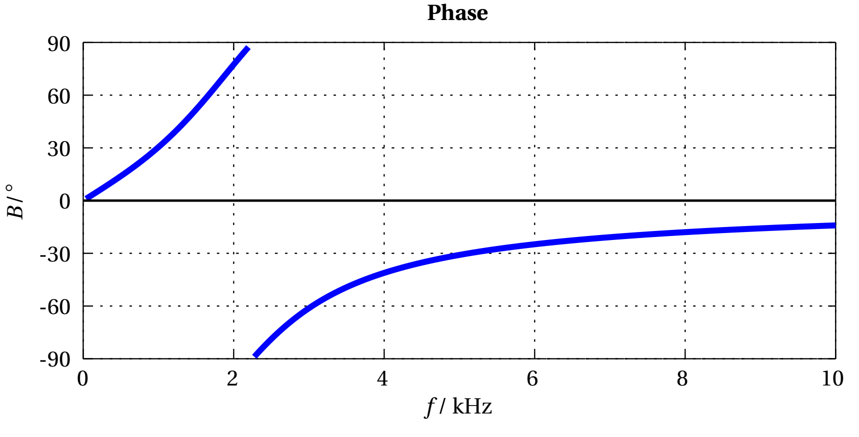
Man vergleiche das Ergebnis mit der Lösung der Aufgabe 4.5.

e) Dämpfung und Phase

Wir lösen nun das Gleichungssystem des Knotenpotenzialverfahrens für jeden einzelnen Frequenzpunkt. In Octave realisieren wir dies, indem wir in einer Schleife die Netzliste mit den jeweiligen (frequenzabhängigen) Admittanzen neu erstellen. Die Netzwerkanalyse liefert uns dann den Wert der Übertragungsfunktion bei der betrachteten Frequenz.

$$A(\omega) = -20\lg\left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right|$$
$$B(\omega) = -\arg\left\{\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right\}$$

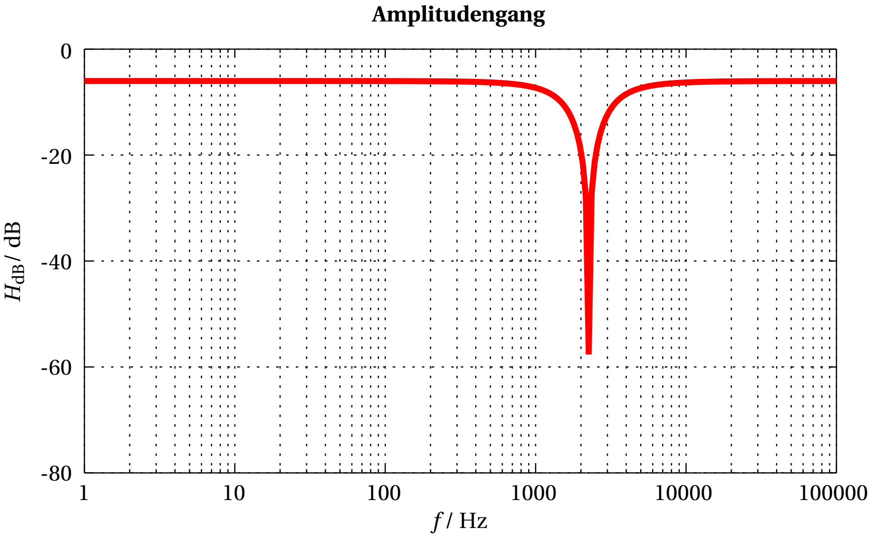


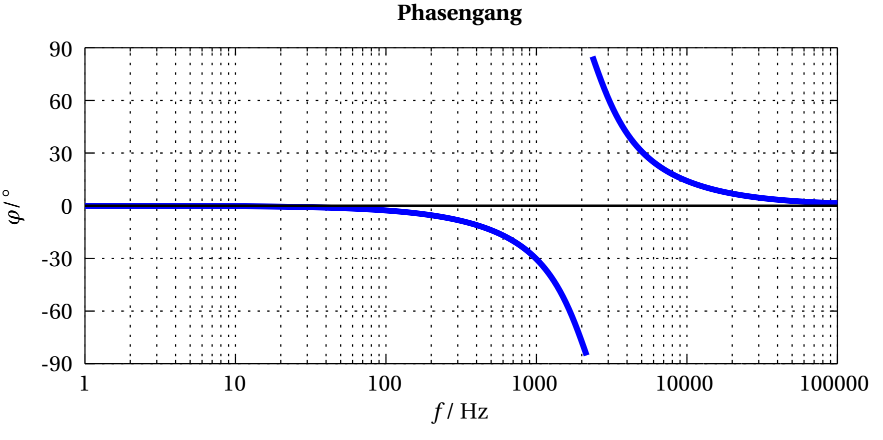


f) Bode-Diagramm

Die Vorgehensweise unterscheidet sich vom Aufgabenpunkt e) lediglich in der Wahl der Frequenzstützpunkte, die hier logarithmisch erfolgt.

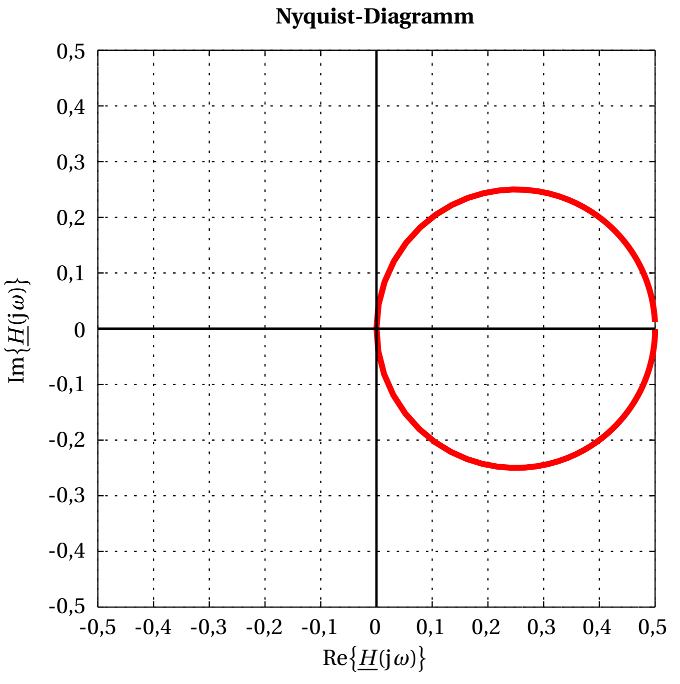
$$H_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\lg\left|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right|$$
$$\varphi(\omega) = \arg\left\{\underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right\}$$





g) Nyquist-Diagramm

Auch hier erfolgt die Wahl der Frequenzstützpunkte logarithmisch.



Octave-Datei: `loesung_06_08.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 6.8

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
U0 = 10;      % Volt
R1 = 30e3;    % Ohm
R2 = 30e3;    % Ohm
C  = 5e-9;    % F
L  = 1;       % H
disp("Vorgaben");
disp(["  |U0|    = ",num2str(abs(U0))," V"]);
disp(["  arg(U0) = ",num2str(angle(U0)*180/pi),"°"]);
disp(["  R1      = ",num2str(R1*1e-3)," kOhm"]);
disp(["  R2      = ",num2str(R2*1e-3)," kOhm"]);
disp(["  C       = ",num2str(C*1e9)," nF"]);
disp(["  L       = ",num2str(L)," H"]);
disp(" ");

% Frequenzachse und Frequenzstützstellen
N = 256;
n = 0:N-1;

% Frequenzachse mit äquidistanten Frequenzstützstellen
fmin = 0;      % Hz
fmax = 10e3;   % Hz
f = fmin+n*(fmax-fmin)/(N-1);

% Aufbau des Vektors der Übertragungsfunktion
H = zeros(N,1);

% Netzwerkanalyse für jeden Frequenzstützpunkt
for k=1:N
  % Aktuelle Frequenz
  w = 2*pi*f(k);

  % Netzliste
  net = [ ...
    1,0,1/R1,U0,0;...
    1,0,1/R2,0,0;...
    1,2,1/(j*w*L),0,0;...
    2,0,j*w*C,0,0 ];

  % Berechnung der Knotenpotenziale sowie aller Spannungen und Ströme
  [U,Uz,Iz] = kpv(net);

  % Berechnung der Übertragungsfunktion
  H(k) = Uz(2)/U0;
endfor;
```

Octave-Datei: `loesung_06_08.m` (Fortsetzung)

```
% Dämpfung und Phase
A = -20*log10(abs(H));
B = -angle(H)*180/pi;
B(find(abs(H)==min(abs(H)))) = NaN; % Keine Phase, wenn H=0!

% Darstellungsgrenzen der Diagramme (Ordinate)
Amin    = 0;     % dB
Amax    = 30;    % dB
Bmin    = -90;    % Grad
Bmax    = 90;    % Grad

% Darstellung der Dämpfung
hFig1 = figure("Name","Dämpfung");
hPlot1 = plot(f*1e-3,A,"r");
axis([fmin*1e-3,fmax*1e-3,Amin,Amax]);
grid on;
title("\\bf Dämpfung","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("A / dB","FontSize",12);

% Darstellung der Phase
hFig2 = figure("Name","Phase");
hPlot2 = plot(f*1e-3,B,"b");
axis([fmin*1e-3,fmax*1e-3,Bmin,Bmax]);
grid on;
title("\\bf Phase","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("B / °","FontSize",12);

% Frequenzachse mit logarithmisch angeordneten Frequenzstützstellen
fmin = 1;       % Hz
fmax = 100e3;   % Hz
f = 10.^(log10(fmin)+n*(log10(fmax)-log10(fmin))/(N-1));

% Aufbau des Vektors der Übertragungsfunktion
H = zeros(N,1);
```

Octave-Datei: `loesung_06_08.m` (Fortsetzung)

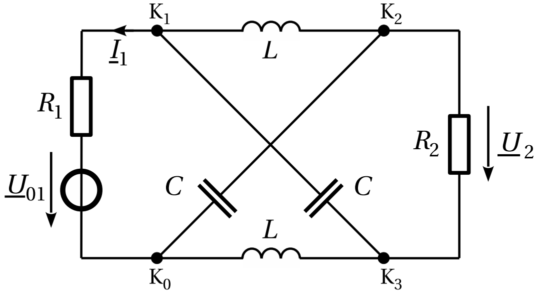
```
% Netzwerkanalyse für jeden Frequenzstützpunkt
for k=1:N
  % Aktuelle Frequenz
  w = 2*pi*f(k);

  % Netzliste
  net = [ ...
    1,0,1/R1,U0,0;...
    1,0,1/R2,0,0;...
    1,2,1/(j*w*L),0,0;...
    2,0,j*w*C,0,0 ];

  % Berechnung der Knotenpotenziale sowie aller Spannungen und Ströme
  [U,Uz,Iz] = kpv(net);

  % Berechnung der Übertragungsfunktion
  H(k) = Uz(2)/U0;
endfor;

% Übertragungsfunktion, Amplituden und Phasengang (Bode-Diagramm)
HdB = 20*log10(abs(H));
phi = angle(H)*180/pi;
phi(find(abs(H)==min(abs(H)))) = NaN; % Keine Phase, wenn H=0!

% Darstellungsgrenzen Bode-Diagramm
HdBmax = 0;      % dB
HdBmin = -80;    % dB
phimax = 90;     % Grad
phimin = -90;    % Grad

% Darstellung des Amplitudengangs
hFig3 = figure("Name","Amplitudengang");
hPlot3 = semilogx(f,HdB,"r");
axis([fmin,fmax,HdBmin,HdBmax]);
grid on;
title("\\bf Amplitudengang","FontSize",14);
xlabel("f / Hz","FontSize",12);
ylabel("20lg|H| / dB","FontSize",12);

% Darstellung des Phasengangs
hFig4 = figure("Name","Phasengang");
hPlot4 = semilogx(f,phi,"b");
axis([fmin,fmax,phimin,phimax]);
grid on;
title("\\bf Phasengang","FontSize",14);
xlabel("f / Hz","FontSize",12);
ylabel("arg\\{H\\} / °","FontSize",12);
```

Octave-Datei: `loesung_06_08.m` (Fortsetzung)

```
% Darstellungsgrenzen Nyquist-Diagramm
Xmin   = -0.5;
Xmax   = 0.5;
Ymin   = -0.5;
Ymax   = 0.5;

% Darstellung des Nyquist-Diagramms
hFig5 = figure("Name","Nyquist-Diagramm");
hPlot5 = plot(real(H),imag(H),"r");
axis([Xmin,Xmax,Ymin,Ymax]);
axis square;
grid on;
title("\\bf Nyquist-Diagramm","FontSize",14);
xlabel("Re\\{H\\}","FontSize",12);
ylabel("Im\\{H\\}","FontSize",12);
```

Übung 6.9 Allpassfilter

Das abgebildete Allpassfilter (vgl. Übung 4.6) soll mit dem Knotenpotenzialverfahren im Frequenzbereich $0 \le f \le 10\,\mathrm{kHz}$ analysiert werden. Insbesondere interessiert hier die Phasenverschiebung zwischen der Quellspannung $\underline{U}_{01}$ und der Spannung $\underline{U}_2$. Verwenden Sie bei der Analyse die vorgegebenen Knotenbezeichnungen. Der Knoten K_0 stellt den Sternpunkt dar.



$\underline{U}_{01} = 10\,\mathrm{V}$
$R_1 = 600\,\Omega$
$R_2 = 1\,\mathrm{k}\Omega$
$C = 100\,\mathrm{nF}$
$L = 100\,\mathrm{mH}$

a) Skizzieren Sie den Baum und bezeichnen Sie die unabhängigen Spannungen.

b) Erstellen Sie eine Netzliste.

c) Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_2$ für die vorab festgelegten Frequenzstützpunkte.

d) Stellen Sie die Phase von $\underline{U}_2$ über der Frequenz dar.

e) Bestimmen Sie $|\underline{U}_2|$. Welche Abhängigkeit von der Frequenz stellen sie fest?

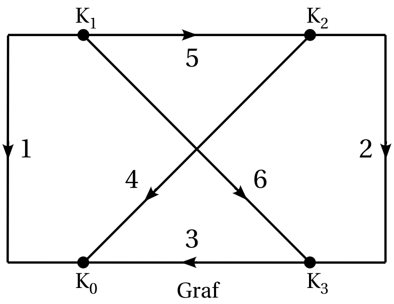
f) Bestimmen Sie $\underline{I}_1$. Welche Abhängigkeit von der Frequenz stellen sie fest und was folgt daraus für die Spannung $\underline{U}_1$ zwischen den Knoten K_1 und K_0?

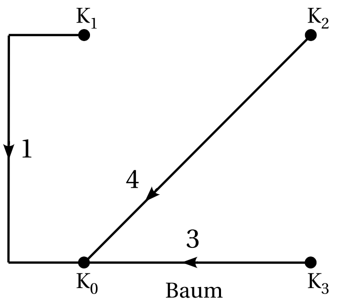
g) Welche Auswirkung hat eine Änderung von R_1 (z. B. auf $1\,\mathrm{k}\Omega$)?

h) Welche Auswirkung hat eine Änderung von R_2 (z. B. auf $600\,\Omega$)?

Lösung der Übungsaufgabe 6.9 (Seite 194)

a) Graf, Baum und unabhängige Spannungen





Unabhängige Spannungen: $\underline{U}_1$, $\underline{U}_3$ und $\underline{U}_4$.

Die Baumzweigspannungen sind die unabhängigen Spannungen. Da in der Schaltung lediglich zwei Zweige nummeriert sind und der Zweig 2 zwischen Knoten K_2 und K_3 liegt, bezeichnen wir den Baumzweig zwischen Knoten K_2 und K_0 mit der Nummer 4. Alle Zweignummern und Zweigrichtungen sind im angegebenen Grafen eindeutig festgelegt.

b) Netzliste des Netzwerks

K+	K−	Zweigadmittanz	Quellspannung	Quellstrom
1	0	$1/R_1$	$\underline{U}_{01}$	0
2	3	$1/R_2$	0	0
3	0	$1/(\mathrm{j}\omega L)$	0	0
2	0	$\mathrm{j}\omega C$	0	0
1	2	$1/(\mathrm{j}\omega L)$	0	0
1	3	$\mathrm{j}\omega C$	0	0

Die Zweignummerierung entspricht der Reihenfolge der Zeilen in der Netzliste. Die Indizierung der unabhängigen Spannungen bezieht sich aber auf die Vektordarstellung in Octave. Da hier der Zweig 2 kein Baumzweig ist, muss eine entsprechende Interpretation erfolgen. Die Baumzweige befinden sich in dieser Netzliste in den Zeilen 1, 3 und 4. Damit ergibt sich die folgende Zuordnung der Elemente des Vektors der unabhängigen Spannungen (dem Lösungsvektor aus Octave) zur Zweignummerierung im Netzwerk.

$\underline{U}_1 = \mathtt{U(1)}$

$\underline{U}_3 = \mathtt{U(2)}$

$\underline{U}_4 = \mathtt{U(3)}$

c) Berechnung der Spannung $\underline{U}_2$

Zur Berechnung der Spannung $\underline{U}_2$ setzen wir die Netzliste in die Matrix-Darstellung von Octave um und berechnen alle Ströme und Spannungen im Netzwerk mit dem Knotenpotenzialverfahren. (Man vergleiche diese Vorgehensweise mit der Lösung der Übung 4.6.)

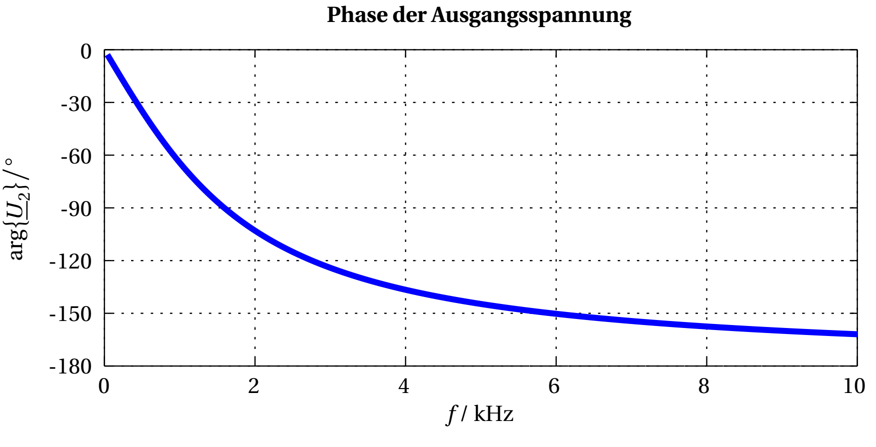
```
net = [ ...
  1,0,1/R1,U01,0;...
  2,3,1/R2,0,0;...
  3,0,1/(j*w*L),0,0;...
  2,0,j*w*C,0,0;...
  1,2,1/(j*w*L),0,0;...
  1,3,j*w*C,0,0 ];
[U,Uz,Iz] = kpv(net); % Netzwerkanalyse
U2 = U(2)-U(3); % Maschengleichung zur Berechnung von U2
```

Die Funktion `kpv` liefert neben den unabhängigen Spannungen `U` in den Baumzweigen zusätzlich auch alle Zweigspannungen `Uz` sowie alle Zweigströme `Iz`, wenn sie, wie oben dargestellt, mit einer Liste von Rückgabevariablen aufgerufen wird. Die Spannung $\underline{U}_2$ kann somit unmittelbar durch `Uz(2)` referenziert werden. Alternativ kann auch die zugehörige Maschengleichung ausgewertet werden. Hierbei ist die abweichende Matrix-Nummerierung in der Octave-Darstellung zu beachten.

$\underline{U}_2 = \underline{U}_4 - \underline{U}_3$	(Schaltung)
`U2 = U(2)-U(3);`	(Octave)

d) Phase der Spannung $\underline{U}_2$

Wir lösen nun das Gleichungssystem des Knotenpotenzialverfahrens für jeden einzelnen Frequenzpunkt. In Octave realisieren wir dies, indem wir in einer Schleife die Netzliste mit den jeweiligen (frequenzabhängigen) Admittanzen neu erstellen. Die Netzwerkanalyse liefert uns dann den Wert der Spannung $\underline{U}_2$ bei der betrachteten Frequenz.



e) Betrag der Spannung $\underline{U}_2$

Bei der Betrachtung der Spannung $\underline{U}_2$ stellen wir fest, dass $|\underline{U}_2|$ nicht von der Frequenz abhängt. Lediglich die Phase ändert sich. Hier ergibt sich

$$|\underline{U}_2| = 6{,}25\ \mathrm{V}\,.$$

f) Strom $\underline{I}_1$ und Spannung $\underline{U}_1$

Die Spannung $\underline{U}_1$ mit der Octave-Notation `U(1)` bzw. `Uz(1)` sowie den Strom $\underline{I}_1$ mit der Octave-Notation `Iz(1)` stehen uns nach Aufruf der Funktion `kpv` unmittelbar zur Verfügung. Wir stellen fest, dass $\underline{I}_1$ bei reeller Quellspannung $\underline{U}_{01}$ rein reell und frequenzunabhängig ist. Damit muss auch $\underline{U}_1$ reell und frequenzunabhängig sein, da auch die Zweigadmittanz im Zweig 1 reell ist.

$$\underline{I}_1 = -6{,}25\ \mathrm{mA}$$
$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{01} + R_1\,\underline{I}_1 = 6{,}25\ \mathrm{V}$$

Ganz allgemein sind der Strom $\underline{I}_1$ und die Spannung $\underline{U}_1$ immer in Phase und weisen die gleiche Phasenlage auf, wie die Quellspannung $\underline{U}_{01}$.

g) Auswirkung einer Änderung von R_1

Wie man leicht durch Eingriff in die Octave-Datei feststellen kann, hat eine Änderung des Widerstands R_1 keine Auswirkungen auf das prinzipielle Verhalten des Netzwerks. Lediglich der Betrag der Spannung $\underline{U}_2$ ändert sich, nicht jedoch der Phasenverlauf. Der Betrag $|\underline{U}_2|$ ist weiterhin frequenzunabhängig.

Bei $R_1 = 1\ \mathrm{k\Omega}$ ergeben sich die Werte

$$|\underline{U}_2| = 5\ \mathrm{V}\,,$$
$$\underline{I}_1 = -5\ \mathrm{mA}\,,$$
$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{01} + R_1\,\underline{I}_1 = 5\ \mathrm{V}\,.$$

h) Auswirkung einer Änderung von R_2

In der Übung 4.6 hatten wir bereits gesehen, dass die Übertragungsfunktion

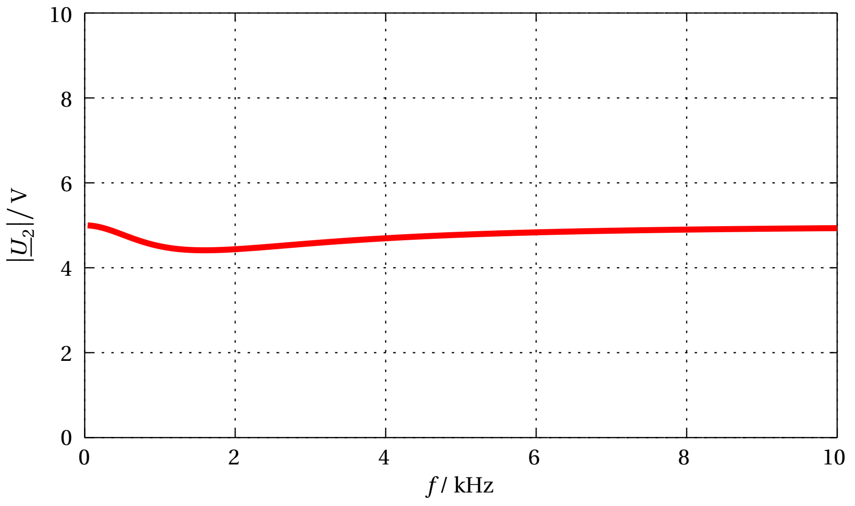
$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2(\mathrm{j}\omega)}{\underline{U}_1(\mathrm{j}\omega)} = \frac{R_2\left(1+\omega^2 LC\right)}{R_2\left(1-\omega^2 LC\right)+\mathrm{j}2\omega L}$$

nur dann eine Allpassfunktion darstellt, wenn die Bedingung

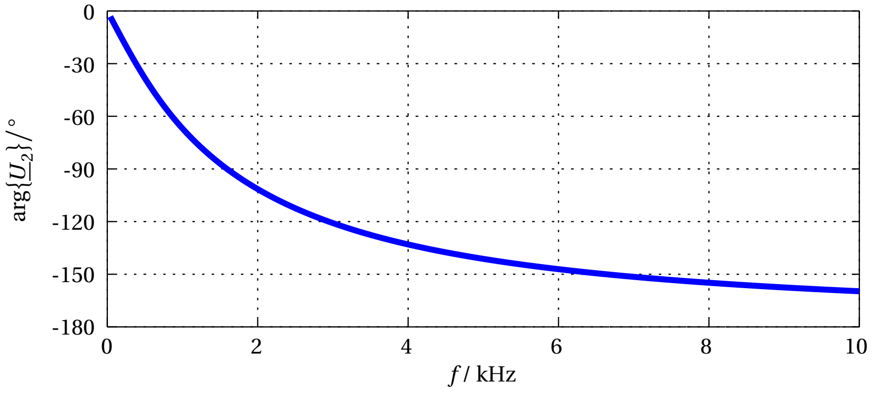
$$R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{100\ \mathrm{mH}}{100\ \mathrm{nF}}} = 1\ \mathrm{k\Omega}$$

erfüllt ist. Wir ändern nun den Widerstandswert auf $R_2 = 600\ \Omega$ und führen die Netzwerkanalyse erneut durch. Nachfolgend sind Amplitude und Phase von $\underline{U}_2$ über der Frequenz dargestellt.

Amplitude der Ausgangsspannung



Phase der Ausgangsspannung



Es sind deutliche Schwankungen der Amplitude von $\underline{U}_2$ zu erkennen. Der Phasenverlauf ändert sich auf den ersten Blick nicht. Bei genauerer Betrachtung sind jedoch kleine Abweichungen zu erkennen. Wesentlich drastischer sind allerdings die Auswirkungen der Widerstandsänderungen bei $\underline{I}_1$ und $\underline{U}_1$.

Octave-Datei: `loesung_06_09.m`

```
% Lösung der Übungsaufgabe 6.9

% Vorgaben (Aufgabenstellung)
U01 = 10;           % Volt
R1  = 600;          % Ohm
R2  = 1000;         % Ohm
C   = 100*10^(-9); % Farad
L   = 100*10^(-3); % Henry
disp("Vorgaben");
disp(["  |U01|    = ",num2str(abs(U01))," V"]);
disp(["  arg(U01) = ",num2str(angle(U01)*180/pi),"°"]);
disp(["  R1       = ",num2str(R1*1e-3)," kOhm"]);
disp(["  R2       = ",num2str(R2*1e-3)," kOhm"]);
disp(["  C        = ",num2str(C*1e9)," nF"]);
disp(["  L        = ",num2str(L)," H"]);
disp(" ");

% Frequenzachse und Frequenzstützstellen
N = 256;
n = 0:N-1;

% Frequenzachse mit äquidistanten Frequenzstützstellen
fmin = 0;       % Hz
fmax = 10e3;    % Hz
f = fmin+n*(fmax-fmin)/(N-1);

% Aufbau der Vektoren zur Erfassung der Frequenzabhängigkeit
% ausgewählter Spannungen und Ströme
U2 = zeros(N,1);
I1 = zeros(N,1);
U1 = zeros(N,1);
```

Octave-Datei: `loesung_06_09.m` (Fortsetzung)

```
% Netzwerkanalyse für jeden Frequenzstützpunkt
for k=1:N
  % Aktuelle Frequenz
  w = 2*pi*f(k);

  % Netzliste
  net = [ ...
    1,0,1/R1,U01,0;...
    2,3,1/R2,0,0;...
    3,0,1/(j*w*L),0,0;...
    2,0,j*w*C,0,0;...
    1,2,1/(j*w*L),0,0;...
    1,3,j*w*C,0,0 ];

  % Berechnung der Knotenpotenziale sowie aller Spannungen und Ströme
  [U,Uz,Iz] = kpv(net);

  % Ausgewählte Spannungen und Ströme
  U2(k) = Uz(2); % Ausgangsspannung
  I1(k) = Iz(1); % Eingangsstrom
  U1(k) = Uz(1); % Eingangsspannung
endfor;

% Betrag der Spannung U2 bei einer beliebig ausgewählten Frequenz
disp("Betrag der Spannung U2 bei einer beliebig ausgewählten Frequenz");
disp(["  |U2|     = ",num2str(abs(U2(fix(N/2)))," V"]);
disp(" ");

% Strom I1 und Spannung U1 bei einer beliebig ausgewählten Frequenz
disp("Strom I1 und Spannung U1 bei einer beliebig ausgewählten Frequenz");
disp(["  I1       = ",num2str(I1(fix(N/2))*1e3)," mA"]);
disp(["  U1       = ",num2str(U1(fix(N/2)))," V"]);
disp(" ");

% Berechnung der Phase der Ausgangsspannung U2
phi2 = angle(U2)*180/pi;

% Darstellungsbereich
phimin = -180;      % Grad
phimax = 0;         % Grad
```

Octave-Datei: `loesung_06_09.m` (Fortsetzung)

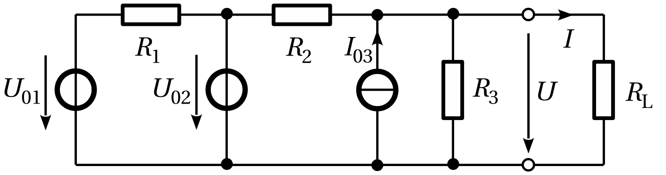
```
% Darstellung der Phase der Ausgangsspannung U2
hFig1 = figure("Name","Phase von U2");
hPlot1 = plot(f*1e-3,phi2,"b");
axis([fmin*1e-3,fmax*1e-3,phimin,phimax]);
grid on;
title("\\bf Phase","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("phi / °","FontSize",12);

% Änderung des Widerstands R2
R2  = 600;          % Ohm
disp("Netzwerkanalyse mit geändertem Widerstand R2");
disp(["  R2       = ",num2str(R2)," Ohm"]);
disp(" ");

% Aufbau des Vektors der Ausgangsspannung
U2 = zeros(N,1);

% Netzwerkanalyse für jeden Frequenzstützpunkt
for k=1:N
  % Aktuelle Frequenz
  w = 2*pi*f(k);

  % Netzliste
  net = [ ...
    1,0,1/R1,U01,0;...
    2,3,1/R2,0,0;...
    3,0,1/(j*w*L),0,0;...
    2,0,j*w*C,0,0;...
    1,2,1/(j*w*L),0,0;...
    1,3,j*w*C,0,0 ];

  % Berechnung der Knotenpotenziale sowie aller Spannungen und Ströme
  [U,Uz,Iz] = kpv(net);

  % Ausgangsspannung
  U2(k) = Uz(2);
endfor;

% Darstellungsbereich
Umin   = 0           % Volt
Umax   = 10          % Volt
phimin = -180;       % Grad
phimax = 0;          % Grad
```

Octave-Datei: `loesung_06_09.m` (Fortsetzung)

```
% Darstellung der Amplitude der Ausgangsspannung U2
hFig2 = figure("Name",["Amplitude von U2 (R2 = ",num2str(R2)," Ohm)"]);
hPlot2 = plot(f*1e-3,abs(U2),"r");
axis([fmin*1e-3,fmax*1e-3,Umin,Umax]);
grid on;
title("\\bf Amplitude","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("|U| / V","FontSize",12);

% Darstellung der Phase der Ausgangsspannung U2
hFig3 = figure("Name",["Phase von U2 (R2 = ",num2str(R2)," Ohm)"]);
hPlot3 = plot(f*1e-3,angle(U2)*180/pi,"b");
axis([fmin*1e-3,fmax*1e-3,phimin,phimax]);
grid on;
title("\\bf Phase","FontSize",14);
xlabel("f / kHz","FontSize",12);
ylabel("phi / °","FontSize",12);
```

Übung 6.10 Überlagerungssatz

Das im Bild dargestellte Gleichstromnetzwerk enthält drei Quellen.



a) Bestimmen Sie U und I mithilfe des Überlagerungssatzes.

b) Stellen Sie die drei Quellen durch eine einzige Ersatzspannungsquelle mit der Quellspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_0 dar.

c) Stellen Sie die drei Quellen durch eine einzige Ersatzstromquelle mit dem Quellstrom I_0 und dem Innenwiderstand R_0 dar.

Lösung der Übungsaufgabe 6.10 (Seite 194)

a) Überlagerungssatz

Es werden der Reihe nach alle Quellen einzeln aktiviert und die Spannung an den Klemmen ermittelt. Alle anderen Quellen sind dabei ausgeschaltet, wobei Spannungsquellen durch einen Kurzschluss ($U_{0\nu} = 0$) und Stromquellen durch einen Leerlauf ($I_{0\nu} = 0$) ersetzt werden.

1. Nur Quelle U_{01} ist aktiv, d. h., $U_{02} = 0$ und $I_{03} = 0$.

$$U_1 = U\Big|_{U_{02}=0,\ I_{03}=0} = 0 \qquad \text{(Kurzschluss durch } U_{02} = 0\text{)}$$

2. Nur Quelle U_{02} ist aktiv, d. h., $U_{01} = 0$ und $I_{03} = 0$.

$$U_2 = U\Big|_{U_{01}=0,\ I_{03}=0} = U_{02} \cdot \frac{R_3||R_L}{R_2 + \left(R_3||R_L\right)} = U_{02} \cdot \frac{R_3\, R_L / \left(R_3 + R_L\right)}{R_2 + R_3\, R_L / \left(R_3 + R_L\right)}$$

$$U_2 = U_{02} \cdot \frac{R_3\, R_L}{R_2\, R_3 + R_2\, R_L + R_L\, R_3}$$

3. Nur Quelle I_{03} ist aktiv, d. h., $U_{01} = 0$ und $U_{02} = 0$.

$$U_3 = U\Big|_{U_{01}=0,\ U_{02}=0} = I_{03} \cdot \left(R_2||R_3||R_L\right) = \frac{I_{03}}{1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_L}$$

$$U_3 = I_{03} \cdot \frac{R_2\, R_3\, R_L}{R_2\, R_3 + R_2\, R_L + R_L\, R_3}$$

4. Überlagerung der einzelnen Spannungen, Berechnung des Stromes

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{R_3\, R_L U_{02} + R_2\, R_3\, R_L\, I_{03}}{R_2\, R_3 + R_2\, R_L + R_L\, R_3}$$

$$I = \frac{U}{R_L} = \frac{R_3\, U_{02} + R_2\, R_3\, I_{03}}{R_2\, R_3 + R_2\, R_L + R_L\, R_3}$$

Anmerkung: Die Quellspannung U_{01} hat bei dieser Schaltung in der Tat keinen Einfluss auf U und I, da die Spannung U_{02} nicht durch U_{01} beeinflusst werden kann. Das Potenzial des Knotens zwischen R_1 und R_2 ist durch U_{02} fest vorgegeben.

b) Ersatzspannungsquelle

1. Leerlaufspannung ($R_L \to \infty$)

$$U_0 = U\Big|_{R_L\to\infty} = \lim_{R_L\to\infty} \frac{R_3\,R_L\,U_{02} + R_2\,R_3\,R_L\,I_{03}}{R_2\,R_3 + R_2\,R_L + R_L\,R_3}$$

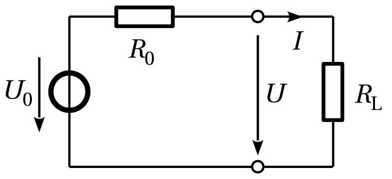
$$U_0 = \lim_{R_L\to\infty} \frac{R_3\,U_{02} + R_2\,R_3\,I_{03}}{R_2\,R_3\,/\,R_L + R_2 + R_3} = \frac{R_3\,U_{02} + R_2\,R_3\,I_{03}}{R_2 + R_3}$$

2. Kurzschlussstrom ($R_L = 0$)

$$I_0 = I\Big|_{R_L=0} = \frac{R_3\,U_{02} + R_2\,R_3\,I_{03}}{R_2\,R_3} = \frac{U_{02}}{R_2} + I_{03}$$

3. Innenwiderstand der Ersatzquelle

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{R_2\,R_3}{R_2 + R_3} = R_2||R_3$$



c) Ersatzstromquelle

$$I_0 = \frac{U_{02}}{R_2 + I_{03}} \qquad \text{(Kurzschlussstrom aus Aufgabenpunkt b)}$$

$$R_0 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \qquad \text{(siehe Aufgabenpunkt b)}$$