Grundlagen der Elektrotechnik

Eine Einführung in die Gleich- und Wechselstromtechnik

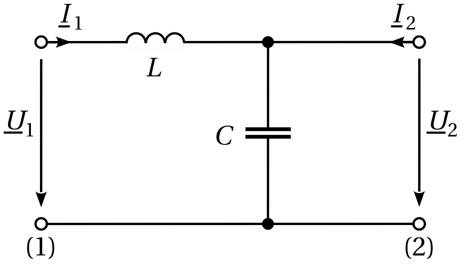
Lösungen der Übungsaufgaben aus Kapitel 7

Reinhard Scholz

20. September 2019

Übung 7.1 Impedanz- und Admittanz-Matrix

Das im Bild dargestellte Zweitor ist zu untersuchen.



a) Bestimmen Sie die Impedanzmatrix des Zweitors.

b) Bestimmen Sie die Admittanzmatrix des Zweitors.

c) Berechnen Sie die Admittanzmatrix durch Inversion der Impedanzmatrix.

d) Berechnen Sie die Reihen-Parallel-Matrix aus der Impedanzmatrix.

Lösung der Übungsaufgabe 7.1 (Seite 213)

a) Impedanzmatrix

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\,\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\,\underline{I}_2$$

$$\underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

(Für $\underline{I}_1 = 0$ gilt $\underline{U}_1 = \underline{U}_2$)

$$\underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

(Für $\underline{I}_2 = 0$ gilt $\underline{I}_C = \underline{I}_1$)

$$\underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}} = \begin{pmatrix} \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) & \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\ \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} & \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \end{pmatrix}$$

b) Admittanzmatrix

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\,\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\,\underline{U}_2$$
$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\,\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\,\underline{U}_2$$

$$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$$

$$\underline{Y}_{12} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$$

$$\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$$

$$\underline{Y}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\underline{\boldsymbol{Y}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} & -\frac{1}{\mathrm{j}\omega L} \\ -\frac{1}{\mathrm{j}\omega L} & \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \end{pmatrix}$$

c) Inversion der Impedanzmatrix

$$\underline{\boldsymbol{Y}} = \underline{\boldsymbol{Z}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\boldsymbol{Z}}} \begin{pmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \end{pmatrix}$$

$$\det \underline{\boldsymbol{Z}} = \begin{vmatrix} \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) & \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\ \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} & \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\omega L - 1/\omega C}{\omega C} + \frac{1}{\omega^2 C^2} = \frac{\omega^2 LC - 1 + 1}{\omega^2 C^2} = \frac{L}{C}$$

$$\underline{\boldsymbol{Y}} = \frac{C}{L} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} & -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\ -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} & \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L} & -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L} \\ -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L} & \mathrm{j}\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right) \end{pmatrix}$$

d) Reihen-Parallel-Matrix

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\underline{Z}_{22}} \begin{pmatrix} \det \underline{\boldsymbol{Z}} & \underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{j}\omega C \begin{pmatrix} \dfrac{L}{C} & \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\ -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \begin{pmatrix} \mathrm{j}\omega L & 1 \\ -1 & \mathrm{j}\omega C \end{pmatrix}$$

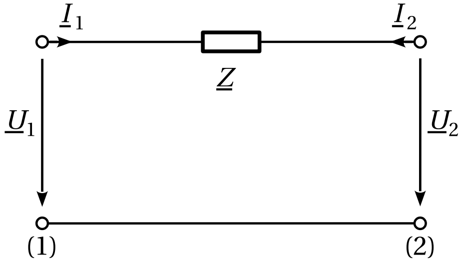
Übung 7.2 Reihen-Parallel-Schaltung

Die Reihen-Parallel-Matrix $\underline{\boldsymbol{H}}$ eines Zweitors N ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{\boldsymbol{H}} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix} .$$

a) Skizzieren Sie eine Reihen-Parallel-Schaltung, bestehend aus den Zweitoren N′ und N″. Zeigen Sie, dass die Reihen-Parallel-Matrix des Gesamtsystems gegeben ist durch $\underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{H}}' + \underline{\boldsymbol{H}}''$.

Nun soll das im Bild dargestellten Zweitor betrachtet werden.



b) Ermitteln Sie die Reihen-Parallel-Matrix $\tilde{\underline{\boldsymbol{H}}}$.

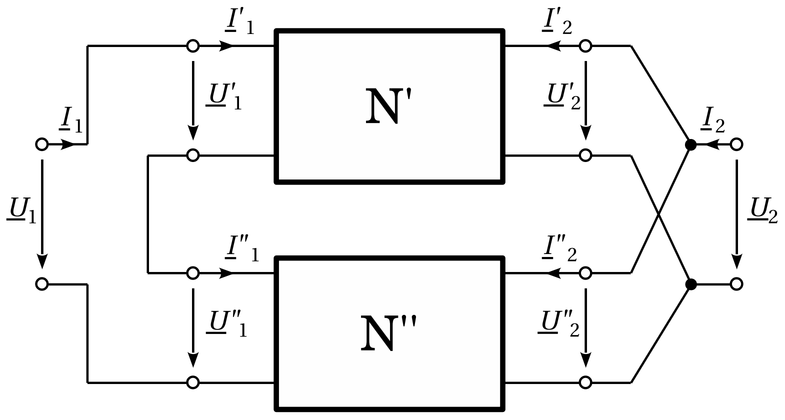
Jetzt werden zwei Zweitore N′ und N″ in einer Reihen-Parallel-Schaltung zusammengeschaltet. Beide Zweitore enthalten das im Bild dargestellte Netzwerk, wobei $\underline{Z}$ in N′ durch $\mathrm{j}\omega L$ und in N″ durch $1/(\mathrm{j}\omega C)$ gegeben ist.

c) Skizzieren und vereinfachen Sie die Schaltung.

d) Ermitteln Sie die Reihen-Parallel-Matrix $\underline{\boldsymbol{H}}$ durch Summation gemäß Aufgabenpunkt a) und direkt. Warum stimmen die beiden Ergebnisse nicht überein? Welches Problem ist hier aufgetreten?

Lösung der Übungsaufgabe 7.2 (Seite 213)

a) Reihen-Parallel-Matrix des Gesamtsystems



$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}'_1 = \underline{I}''_1 & \qquad \underline{U}_1 &= \underline{U}'_1 + \underline{U}''_1 \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}'_2 = \underline{U}''_2 & \qquad \underline{I}_2 &= \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{H}}' \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{H}}'' \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{pmatrix} &= \underline{\boldsymbol{H}}' \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{pmatrix} + \underline{\boldsymbol{H}}'' \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{U}''_2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\boldsymbol{H}}' \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} + \underline{\boldsymbol{H}}'' \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} &= \underbrace{\left(\underline{\boldsymbol{H}}' + \underline{\boldsymbol{H}}''\right)}_{=\underline{\boldsymbol{H}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Reihen-Parallel-Matrix des Zweitors

Das Zweitor wird beschrieben durch die beiden Gleichungen

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2 \quad \text{und} \quad \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \underline{Z}\,\underline{I}_1 = -\underline{Z}\,\underline{I}_2\,.$$

Die Auswertung dieser Gleichungen liefert uns die gesuchte Reihen-Parallel-Matrix des Zweitors.

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{\tilde{H}}_{11}\,\underline{I}_1 + \underline{\tilde{H}}_{12}\,\underline{U}_2\\ \underline{I}_2 &= \underline{\tilde{H}}_{21}\,\underline{I}_1 + \underline{\tilde{H}}_{22}\,\underline{U}_2\end{aligned}$$

$$\underline{\tilde{H}}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \underline{Z}$$

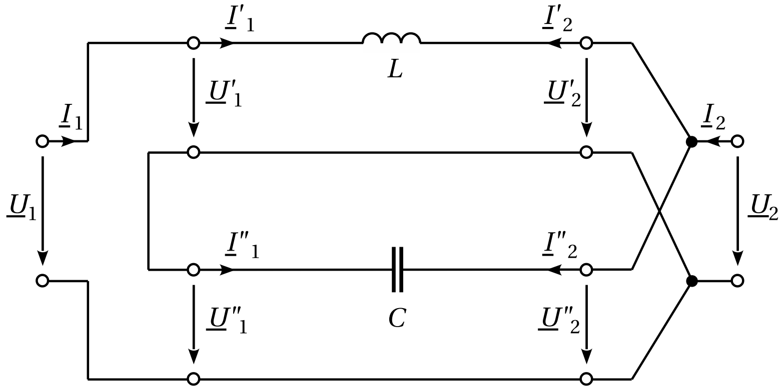
$$\underline{\tilde{H}}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = 1$$

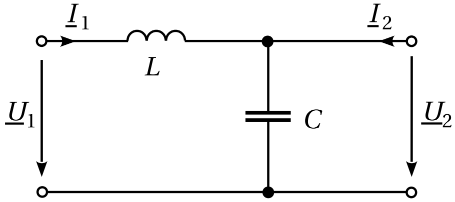
$$\underline{\tilde{H}}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = -1$$

$$\underline{\tilde{H}}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = 0$$

$$\underline{\boldsymbol{\tilde{H}}} = \begin{pmatrix}\underline{Z} & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

c) Schaltskizze mit Vereinfachung





Durch die Reihen-Parallel-Schaltung ist die Torbedingung bei den Zweitoren N’ und N” nicht mehr erfüllt. Dies ist sofort ersichtlich, wenn Tor 2 des Gesamtzweitors N im Leerlauf betrieben und eine Spannung an Tor 1 angelegt wird. Dann fließt der Strom $\underline{I}'_1 = -\underline{I}'_2 = \underline{I}''_2 = -\underline{I}''_1$ in die untere Klemme des Tors 1 von N’ und verletzt somit die Torbedingung.

d) Reihen-Parallel-Matrix des Zweitors N

$$\underline{\boldsymbol{H}}' + \underline{\boldsymbol{H}}'' = \begin{pmatrix} \mathrm{j}\omega L & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/(\mathrm{j}\omega C) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{j}\left(\omega L - 1/(\omega C)\right) & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist das tatsächlich die Reihen-Parallel-Matrix des Zweitors N?

Probe durch direkte Bestimmung der Matrixelemente:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\,\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\,\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\,\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\,\underline{U}_2 \end{aligned}$$

$$\underline{H}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \mathrm{j}\omega L$$

$\underline{U}_2 = 0$ bedeutet, dass die Kapazität kurzgeschlossen ist.

$$\underline{H}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = 1$$

$$\underline{H}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = -1$$

$$\underline{H}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \mathrm{j}\omega C$$

$\underline{I}_1 = 0$ bedeutet, dass über der Induktivität keine Spannung abfällt.

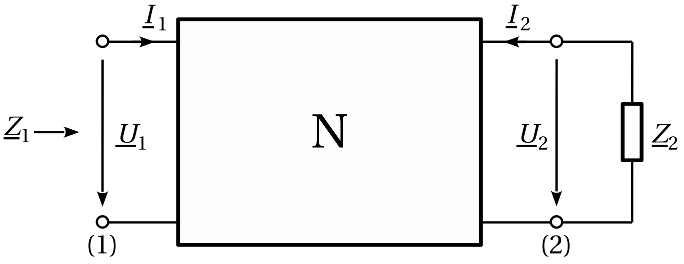
$$\underline{\boldsymbol{H}} = \begin{pmatrix} \mathrm{j}\omega L & 1 \\ -1 & \mathrm{j}\omega C \end{pmatrix}$$

Dieses Ergebnis ist richtig! Die Addition $\underline{\boldsymbol{H}}' + \underline{\boldsymbol{H}}''$ liefert nur dann die Reihen-Parallel-Matrix des Gesamtnetzwerks, wenn die Torbedingungen der Einzelzweitore weiterhin erfüllt sind. Hier fließen nach der Zusammenschaltung Kreisströme, so dass die Torbedingungen verletzt sind!

Die Verkettung von Zweitoren hat keinen Einfluss auf die Torbedingungen. Bei der Kettenschaltung können die Torbedingungen somit niemals verletzt werden.

Übung 7.3 Beschaltetes Zweitor

Das Zweitor N wird, wie im Bild dargestellt, an Tor 2 mit der Impedanz $\underline{Z}_2$ beschaltet.



a) Beschreiben Sie das Netzwerk N mit der Impedanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Z}}$.

b) Ermitteln Sie die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_1$ in Abhängigkeit von $\underline{Z}_2$ und den Elementen der Impedanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Z}}$.

c) Welche Werte nimmt $\underline{Z}_1$ an, wenn Tor 2 kurzgeschlossen wird bzw. leerläuft?

Lösung der Übungsaufgabe 7.3 (Seite 214)

a) Beschreibung des Netzwerks mit der Impedanzmatrix

Matritzenschreibweise

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\,\underline{I}_2 \tag{7.1}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\,\underline{I}_2 \tag{7.2}$$

b) Eingangsimpedanz

Die Impedanz an Tor 2 lässt sich unter Berücksichtigung der Zählpfeilrichtung von $\underline{I}_2$ ausdrücken durch

$$\underline{Z}_2 = -\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}. \tag{7.3}$$

Die Bestimmung von $\underline{Z}_1$ bei angeschlossener Impedanz $\underline{Z}_2$ erfolgt durch Auflösung des Gleichungssystems.

Aus (7.1): $$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$$

Aus (7.2): $$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_{22}\,\underline{I}_2}{\underline{Z}_{21}}$$

Mit (7.3) folgt schließlich

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}\frac{\underline{I}_2\,\underline{Z}_{21}}{\underline{U}_2 - \underline{Z}_{22}\,\underline{I}_2} = \underline{Z}_{11} + \frac{\underline{Z}_{12}\,\underline{Z}_{21}}{\underline{U}_2/\underline{I}_2 - \underline{Z}_{22}} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\,\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{22}}\,.$$

c) Sonderfälle

$$\underline{Z}_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\,\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}}$$

$$\underline{Z}_2 = \infty \quad\Rightarrow\quad \underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11}$$

Übung 7.4 Hybridmatrix

Die Hybridmatrix eines Zweitors ist gegeben durch

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mathrm{j}\omega C \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie die Impedanz $\underline{Z}_{22}$ an Tor 2 bei Leerlauf an Tor 1. (Ausgangsimpedanz bei Leerlauf am Eingang.)

b) Ermitteln Sie die Kettenmatrix des Zweitors.

Nun wird Tor 2 des Netzwerks mit einer Induktivität L beschaltet.

c) Bestimmen Sie die Impedanz $\underline{Z}_1$ des resultierenden Eintors.

Lösung der Übungsaufgabe 7.4 (Seite 214)

a) Ausgangsimpedanz bei Leerlauf am Eingang

$$\underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{\underline{H}_{22}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

b) Kettenmatrix des Zweitors

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_1 + \mathrm{j}\omega C\underline{U}_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = \mathrm{j}\omega C\underline{U}_2 - \underline{I}_2$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{j}\omega C & 1 \end{pmatrix}}_{=\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{j}\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmung von $\underline{Z}_1$ bei Beschaltung von Tor 2 mit einer Induktivität L

$$\mathrm{j}\omega L = \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_2 = -\frac{\underline{U}_2}{j\omega L}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2$$

$$\underline{I}_1 = \mathrm{j}\omega C\underline{U}_2 - \underline{I}_2 = \left(\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\right)\underline{U}_2 = \left(\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\right)\underline{U}_1$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

Die Impedanz $\underline{Z}_1$ besteht somit aus einer Parallelschaltung der Kapazität C und der Induktivität L.

Übung 7.5 Lineares Zweitor

Ein Zweitor wird durch $\underline{U}_1 = -R\,\underline{I}_2$ und $\underline{U}_2 = R\,\underline{I}_1$ beschrieben, wobei R eine positive Konstante darstellt.

a) Geben Sie die Impedanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Z}}$ des Zweitors an.

b) Ermitteln Sie die Kettenmatrix $\underline{\boldsymbol{A}}$ des Zweitors.

Nun wird Tor 2 des Zweitors mit einer Kapazität C beschaltet. An Tor 1 wird eine ideale Spannungsquelle mit der Quellspannung $\underline{U}_0$ angeschlossen.

c) Skizzieren Sie die Anordnung. Tragen Sie dabei auch alle Spannungen und Ströme an den Toren des Netzwerks ein.

d) Berechnen Sie die Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ sowie die Spannung $\underline{U}_2$.

e) Durch das mit der Kapazität C beschaltete Netzwerk wird die Spannungsquelle induktiv belastet. Bestimmen Sie die entsprechende Induktivität L.

Lösung der Übungsaufgabe 7.5 (Seite 214)

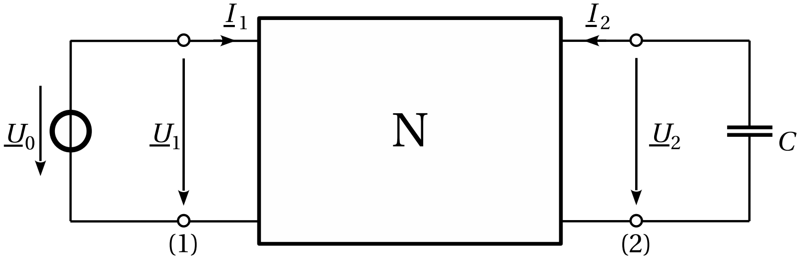
a) Impedanzmatrix

$$\underline{U}_1 = -R\,\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = R\,\underline{I}_1$$
$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12}\\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{12}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -R\\ R & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \underline{\boldsymbol{Z}} = \begin{pmatrix}0 & -R\\ R & 0\end{pmatrix}$$

b) Kettenmatrix

$$\underline{U}_1 = -R\,\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = R\,\underline{I}_1 \quad\Rightarrow\quad \underline{I}_1 = \frac{1}{R}\underline{U}_2$$
$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{A}_{11} & \underline{A}_{12}\\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{12}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_2\\ -\underline{I}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & R\\ \frac{1}{R} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_2\\ -\underline{I}_2\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \underline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix}0 & R\\ \frac{1}{R} & 0\end{pmatrix}$$

c) Schaltskizze der Anordnung



d) Ströme und Spannungen

$$\underline{U}_1 = -R\,\underline{I}_2 = \underline{U}_0 \quad\Rightarrow\quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_0}{-R}$$
$$\mathrm{j}\omega C = \frac{-\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \quad\Rightarrow\quad \underline{U}_2 = \frac{-\underline{I}_2}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{\underline{U}_0}{\mathrm{j}\omega CR}$$
$$\underline{U}_2 = R\,\underline{I}_1 \quad\Rightarrow\quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{R} = \frac{\underline{U}_0}{\mathrm{j}\omega CR^2}$$

e) Induktive Last

Die Quelle wird mit der Impedanz

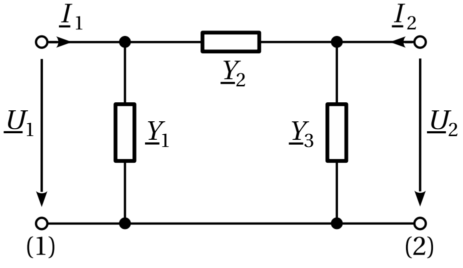
$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{U}_0/(\mathrm{j}\omega CR^2)} = \mathrm{j}\omega CR^2$$

belastet. Wir vergleichen dieses Ergebnis nun mit den Verhältnissen beim direkten Anschluss einer Induktivität L an das linke Klemmenpaar und erhalten

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \mathrm{j}\omega L \quad\Rightarrow\quad L = CR^2\,.$$

Übung 7.6 Admittanzmatrix

In der Abbildung ist ein Zweitor dargestellt, das aus drei Admittanzen $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$ und $\underline{Y}_3$ aufgebaut ist.



a) Ermitteln Sie die Admittanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Y}}$ des Zweitors.

b) Bestimmen Sie die Eingangsadmittanz $\underline{Y}_{1\mathrm{K}} = \underline{I}_1/\underline{U}_1$ an Tor 1 des Zweitors bei Kurzschluss von Tor 2 ($\underline{U}_2 = 0$).

c) Bestimmen Sie die Eingangsadmittanz $\underline{Y}_{1\mathrm{L}} = \underline{I}_1/\underline{U}_1$ an Tor 1 des Zweitors bei Leerlauf von Tor 2 ($\underline{I}_2 = 0$).

Nun wird an Tor 1 eine ideale Spannungsquelle mit der Quellspannung $\underline{U}_0$ und an Tor 2 ein reeller Leitwert G angeschlossen.

d) Skizzieren Sie die beschriebene Anordnung. Tragen Sie auch alle Spannungen und Ströme ein.

e) Berechnen Sie den Strom $\underline{I}_1$, der von der Quelle in Tor 1 eingespeist wird.

Lösung der Übungsaufgabe 7.6 (Seite 215)

a) Admittanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Y}}$ des Zweitors N

$$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

$$\underline{Y}_{12} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = -\underline{Y}_2$$

$$\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = -\underline{Y}_2$$

$$\underline{Y}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$$

$$\underline{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \end{pmatrix}$$

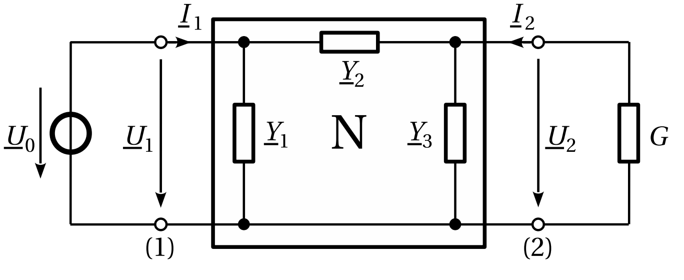
b) Eingangsadmittanz $\underline{Y}_{1K} = \underline{I}_1 / \underline{U}_1$ an Tor 1 bei Kurzschluss von Tor 2

$$\underline{Y}_{1K} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

c) Eingangsadmittanz $\underline{Y}_{1L} = \underline{I}_1 / \underline{U}_1$ an Tor 1 bei Leerlauf von Tor 2

$$\underline{Y}_{1L} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \underline{Y}_1 + \frac{1}{1/\underline{Y}_2 + 1/\underline{Y}_3} = \underline{Y}_1 + \frac{1}{(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)/(\underline{Y}_2 \cdot \underline{Y}_3)} = \underline{Y}_1 + \frac{\underline{Y}_2\,\underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

d) Schaltskizze der Anordnung



e) Berechnung des Eingangsstroms $\underline{I}_1$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0$$
$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\,\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\,\underline{U}_2$$
$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\,\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\,\underline{U}_2$$
$$\underline{I}_2 = -G\,\underline{U}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{U}_2 = -\underline{I}_2/G$$

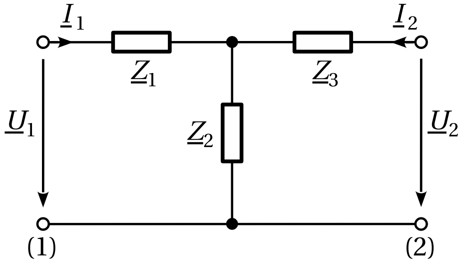
$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\,\underline{U}_0 - \underline{Y}_{12}\,\underline{I}_2/G$$
$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\,\underline{U}_0 - \underline{Y}_{22}\,\underline{I}_2/G \qquad \Rightarrow \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_{21}}{1+\underline{Y}_{22}/G}\,\underline{U}_0 = \frac{\underline{Y}_{21}G}{G+\underline{Y}_{22}}\,\underline{U}_0$$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\,\underline{U}_0 - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{G+\underline{Y}_{22}}\,\underline{U}_0 = \left(\underline{Y}_{11} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{G+\underline{Y}_{22}}\right)\underline{U}_0 = \left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 - \frac{\underline{Y}_2^2}{G+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}\right)\underline{U}_0$$

$$\underline{I}_1 = \frac{G\left(\underline{Y}_1+\underline{Y}_2\right)+\underline{Y}_1\underline{Y}_2+\underline{Y}_1\underline{Y}_3+\underline{Y}_2\underline{Y}_3}{G+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}\,\underline{U}_0$$

Übung 7.7 T-Schaltung

Im Bild ist eine sogenannte T-Schaltung dargestellt.



a) Ermitteln Sie die Impedanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Z}}$ des Zweitors.

b) Ermitteln Sie die Admittanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Y}}$ des Zweitors.

c) Bestimmen Sie die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_{1\mathrm{K}} = \underline{U}_1/\underline{I}_1$ an Tor 1 des Zweitors bei Kurzschluss von Tor 2 ($\underline{U}_2 = 0$).

d) Bestimmen Sie die Eingangsadmittanz $\underline{Y}_{1\mathrm{L}} = \underline{I}_1/\underline{U}_1$ an Tor 1 des Zweitors bei Leerlauf von Tor 2 ($\underline{I}_2 = 0$).

Lösung der Übungsaufgabe 7.7 (Seite 215)

a) Impedanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Z}}$ des Zweitors N

$$\underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

$$\underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \underline{Z}_2$$

$$\underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \underline{Z}_2$$

$$\underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{pmatrix}$$

b) Admittanzmatrix $\underline{\boldsymbol{Y}}$ des Zweitors N

$$\underline{\boldsymbol{Y}} = \underline{\boldsymbol{Z}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\boldsymbol{Z}}} \begin{pmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{21} \\ -\underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{11} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det \underline{\boldsymbol{Z}}} \begin{pmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \end{pmatrix}$$

$$\det \underline{\boldsymbol{Z}} = \underline{Z}_{11}\,\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\,\underline{Z}_{21} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \underline{Z}_2^2 = \underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\,\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3$$

$$\underline{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\,\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3} & \dfrac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\,\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3} \\ \dfrac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\,\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3} & \dfrac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\,\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3} \end{pmatrix}$$

c) Eingangsimpedanz bei Kurzschluss am Ausgang

$$\underline{Z}_{1\mathrm{K}} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}} = \frac{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\,\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) + \underline{Z}_2\,\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{1\mathrm{K}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\,\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 || \underline{Z}_3$$

Das Ergebnis lässt sich anhand der Schaltung unmittelbar nachvollziehen. Werden die beiden Klemmen rechts miteinander verbunden (Kurzschluss am Ausgang), so sind $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$ parallel geschaltet. Die Impedanz $\underline{Z}_1$ liegt dazu in Reihe.

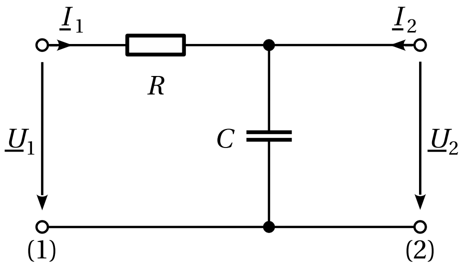
d) Eingangsadmittanz bei Leerlauf am Ausgang

$$\underline{Y}_{1\mathrm{L}} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{\underline{Z}_{11}} = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Wie in der Schaltung ist zu erkennen ist, fließt durch $\underline{Z}_3$ kein Strom, wenn der Ausgang im Leerlauf betrieben wird. An den Eingangsklemmen liegt nun die Reihenschaltung von $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$. Hier ist nach der Eingangsadmittanz, also dem Kehrwert der Eingangsimpedanz gefragt.

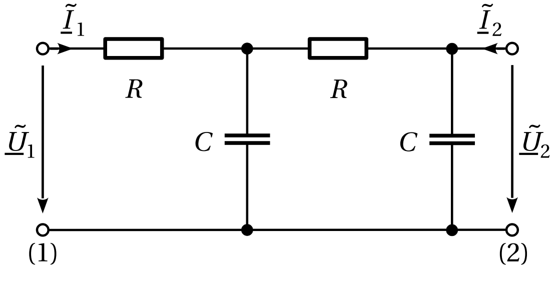
Übung 7.8 Kettenschaltung

Das abgebildete RC-Glied stellt ein Zweitor dar.



a) Bestimmen Sie die Kettenmatrix $\underline{\boldsymbol{A}}$ des Zweitors.

Nun werden zwei identische RC-Glieder, wie dargestellt, kaskadiert.



b) Geben Sie die allgemeine Berechnungsvorschrift zur Bestimmung der Kettenmatrix $\underline{\tilde{\boldsymbol{A}}}$ des Gesamtnetzwerks aus den Kettenmatrizen $\underline{\boldsymbol{A}}$ der Einzelzweitore an.

c) Berechnen Sie die Kettenmatrix $\underline{\tilde{\boldsymbol{A}}}$ des Gesamtnetzwerks.

Jetzt wird an Tor 1 des Gesamtnetzwerks eine ideale Spannungsquelle mit der Quellspannung $\underline{U}_0$ angeschlossen.

d) Ermitteln Sie den Strom $\underline{\tilde{I}}_2$, wenn Tor 2 des Gesamtnetzwerks kurzgeschlossen wird.

Lösung der Übungsaufgabe 7.8 (Seite 216)

a) Kettenmatrix des RC-Glieds

$$\underline{A}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{R+1/(\mathrm{j}\omega C)}{1/(\mathrm{j}\omega C)} = 1+\mathrm{j}\omega RC$$

$$\underline{A}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{-\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0} = R$$

$$\underline{A}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0} = \mathrm{j}\omega C$$

$$\underline{A}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0} = 1$$

$$\underline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{j}\omega RC & R \\ \mathrm{j}\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

b) Allgemeine Berechnungsvorschrift

$$\underline{\widetilde{\boldsymbol{A}}} = \underline{\boldsymbol{A}} \cdot \underline{\boldsymbol{A}}$$

c) Kettenmatrix des Gesamtnetzwerks

$$\underline{\widetilde{\boldsymbol{A}}} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{j}\omega RC & R \\ \mathrm{j}\omega C & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\mathrm{j}\omega RC & R \\ \mathrm{j}\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\widetilde{\boldsymbol{A}}} = \begin{pmatrix} (1+\mathrm{j}\omega RC)^2+\mathrm{j}\omega RC & (1+\mathrm{j}\omega RC)R+R \\ (1+\mathrm{j}\omega RC)\mathrm{j}\omega C+\mathrm{j}\omega C & \mathrm{j}\omega C+1 \end{pmatrix}$$

d) Strom $\underline{\widetilde{I}}_2$ bei Kurzschluss am Ausgang

$$\underline{\widetilde{A}}_{12} = \left.\frac{\underline{\widetilde{U}}_1}{-\underline{\widetilde{I}}_2}\right|_{\underline{\widetilde{U}}_2=0} \quad\Rightarrow\quad \underline{\widetilde{I}}_2 = -\frac{\underline{\widetilde{U}}_1}{\underline{\widetilde{A}}_{12}}$$

Mit $\underline{\widetilde{U}}_1 = \underline{U}_0$ ergibt sich

$$\underline{\widetilde{I}}_2 = -\frac{\underline{U}_0}{(1+\mathrm{j}\omega RC)R+R} = -\frac{\underline{U}_0}{2R+\mathrm{j}\omega R^2C}\,.$$